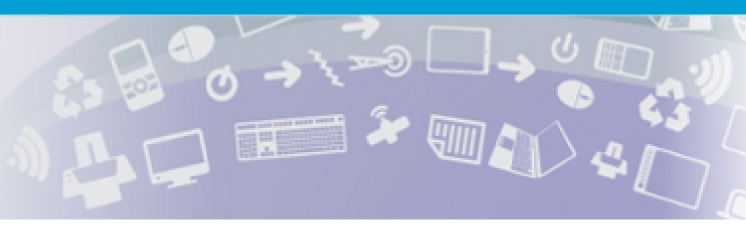
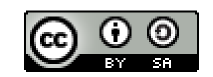






Algebra Lineal para Ingeniería

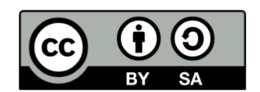


AUTORES

Sergio Argomedo Cornejo
Juan Herrera Tobar
Katherina Molina Alfaro
Santiago Relos Paco

Álgebra Lineal para Ingeniería
1a ed. - Iniciativa Latinoamericana de Libros de Texto Abiertos (LATIn), 2014. 173 pag.

Primera Edición: Marzo 2014
Iniciativa Latinoamericana de Libros de Texto Abiertos (LATIn)
http://www.proyectolatin.org/









Este texto forma parte de la Iniciativa Latinoamericana de Libros de Texto abiertos (LATIn), proyecto financiado por la Unión Europea en el marco de su Programa ALFA III EuropeAid.

El Proyecto LATIn está conformado por: Escuela Superior Politécnica del Litoral, Ecuador (ESPOL); Universidad Autónoma de Aguascalientes, México (UAA), Universidad Católica de San Pablo, Perú (UCSP); Universidade Presbiteriana Mackenzie, Brasil(UPM); Universidad de la República, Uruguay (UdelaR); Universidad Nacional de Rosario, Argentina(UR); Universidad Central de Venezuela, Venezuela (UCV), Universidad Austral de Chile, Chile (UACH), Universidad del Cauca, Colombia (UNICAUCA), Katholieke Universiteit Leuven, Bélgica (KUL), Universidad de Alcalá, España (UAH), Université Paul Sabatier, Francia (UPS).

Índice general

1 Algunas aplicaciones del Álgebra Lineal 11

1.1 Programación Lineal[2] 11

1.1.1 El problema del transporte 11

1.1.2 El problema de la dieta 12

1.1.3 El problema del flujo en una red 12

1.2 Regresión lineal con k variables 13

1.3 El modelo Input-Output de Leontief 13

1.4 El secreto del Google y el Algebra Lineal 14

1.5 Cálculo a varias variables 16

1.6 Mensajes secretos. Criptografía 16

1.7 Telecomunicaciones 16

1.8 Compresión de imágenes 16

2 Matrices 17

2.1 ¿Qué es una matriz? 17

2.1.1 Notación. 17

2.1.2 Orden de una matriz 18

2.2 Operaciones con matrices 19

2.2.1 Igualdad de matrices 19

2.2.2 Producto por un número o Producto escalar 19

2.2.3 Suma 20

2.2.4 Resta o Diferencia de Matrices. 20

2.2.5 Producto de matrices 21

2.2.6 La transpuesta de una matriz 24

2.2.7 Propiedades de las operaciones matriciales 24

2.3 Matrices especiales 28

2.3.1 Matriz cuadrada 28

2.3.2 Matrices triangulares 29

2.3.3 Matriz diagonal e identidad 29

2.3.4 La traza y contratraza de una matriz cuadrada 31

[2]Obtenido del libro: Formulación y Resolución de Modelos de Programación Matemática en Ingeniería y Ciencia, de Enrique Castillo, Antonio J. Conejo, Pablo Pedregal, Ricardo García y Natalia Alguacil.

2.4 La función matricial ω 31
2.5 Reducción de Gauss 34
2.5.1 Operaciones elementales, Matrices elementales y equivalencia de matrices 34
2.5.2 Las operaciones elementales como aniquiladores . . . 37
2.5.3 Forma escalonada y escalonada reducida por filas . . . 37
2.5.4 Reducción de Gauss . . . 38
2.6 Determinante de una matriz cuadrada 40
2.6.1 La definición de determinante . . . 40
2.6.2 Propiedades del determinante . . . 43
2.6.3 Menor complementario y cofactor (adjunto) de un elemento . . . 46
2.6.4 Menor y menor principal . . . 48
2.6.5 Rango de una matriz . . . 48
2.7 ¿Sabias que? 52
3 Sistemas de ecuaciones lineales . . . 53
3.1 Introducción 53
3.1.1 La definición de sistema lineal . . . 53
3.1.2 Notación matricial . . . 53
3.1.3 La solución de un sistema lineal . . . 53
3.2 Teorema de existencia de soluciones 54
3.3 Soluciones de un sistema triangular 55
3.3.1 Sistema triangular superior . . . 55
3.3.2 Sistema triangular inferior . . . 56
3.4 Sobre las soluciones del sistema $Ax = b$ 57
3.4.1 Sistemas equivalentes . . . 57
3.4.2 Variables libres . . . 57
3.4.3 Cálculo de la solución de un sistema $Ax = b$ . . . 57
3.5 La inversa de una matriz 62
3.5.1 La definición de matriz inversa . . . 62
3.5.2 Cálculo de la inversa . . . 63
3.5.3 Algunos teoremas sobre la inversa . . . 65
3.5.4 La adjunta de una matriz en el cálculo de la inversa . . . 65
3.6 La regla de Cramer 68
3.7 Sistemas homogéneos 69
3.8 Algo de criptografía 72
3.8.1 La aritmética del reloj . . . 72
3.8.2 Tablas de sumar . . . 73
3.8.3 Matriz clave . . . 74
3.8.4 Mensajes en clave . . . 74
3.9 ¿Sabias que? 77
3.10 Problemas con sistemas de ecuaciones 77
4 Espacios Vectoriales reales . . . 83
4.1 La definición de espacio vectorial 83

4.2 El espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ 84
4.2.1 La recta en $\mathbb{R}^n$ 86
4.2.2 El plano en $\mathbb{R}^3$ 86
4.3 Subespacios 86
4.4 Combinación lineal 87
4.4.1 Espacio generado 87
4.4.2 Dependencia lineal 88
4.5 Base y Dimensión 91
4.6 Espacio fila, espacio columna y espacio nulo 93
5 Espacios producto interno 97
5.1 La definición de espacio producto interno 97
5.1.1 Ejemplos de productos internos 97
5.1.2 Propiedades del producto interno 98
5.2 La norma de un vector 98
5.3 Ortogonalidad 99
5.3.1 Vectores ortogonales 99
5.3.2 Conjuntos ortogonales 99
5.3.3 Bases ortogonales y ortonormales 99
5.4 Proceso de Gram Schmidt 100
5.4.1 La proyección ortogonal 100
5.4.2 La construcción de un conjunto ortogonal de tres vectores 102
5.4.3 El proceso de Gram Schmidt 102
6 Autovalores y autovectores 107
6.1 La definición de autovalor y autovector 107
6.2 Cálculo de autovalores y autovectores 107
6.2.1 Cálculo de autovalores 107
6.2.2 Cálculo de autovectores 109
6.3 Teoremas relativos a autovalores y autovectores 113
6.3.1 Cálculo del polinomio característico 113
6.3.2 Autovalores y rango 113
6.3.3 Autovalores e inversa 113
6.3.4 Múltiplos escalares de un autovector 113
6.3.5 Raíz del polinomio característico 113
6.3.6 Autovectores y dependencia lineal 114
6.3.7 Autovalores y autovectores de matrices simétricas 114
6.3.8 Los discos de Gershgorin 115
6.4 Multiplicidad algebraica y multiplicidad geométrica 115
6.5 Semejanza y diagonalización 117
6.5.1 Matrices semejantes 117
6.5.2 Diagonalización 118

7 Transformaciones lineales . . . 125
7.1 Introducción 125
7.1.1 La definición de transformación lineal . . . 125
7.1.2 Propiedades de una transformación lineal . . . 126
7.2 Construcción de transformaciones lineales 127
7.3 Composición 129
7.4 Núcleo e imagen 129
7.4.1 Núcleo . . . 129
7.4.2 Imagen . . . 130
7.4.3 El teorema de la dimensión . . . 130
7.5 La transformación inversa 132
7.6 La matriz de una transformación lineal 134
7.6.1 Matriz de coordenadas de un vector . . . 134
7.6.2 Matriz de coordenadas de una transformación lineal . . . 135
7.6.3 Cambio de base . . . 138
7.7 Operadores lineales 141
7.8 La geometría de las transformaciones 142
7.8.1 Transformaciones lineales . . . 142
7.8.2 La transformación rotación . . . 142
7.8.3 Transformaciones no lineales . . . 144
8 Factorización LU y LR . . . 147
8.1 Matrices elementales 147
8.2 La inversa de una matriz elemental 148
8.3 La matriz elemental como aniquilador 148
8.3.1 Aniquilación bajo la primera entrada . . . 148
8.3.2 Aniquilador general . . . 149
8.4 Factorización LU 151
8.4.1 El algoritmo de Gauss en la factorización . . . 151
8.4.2 Cálculo de la matriz **L** . . . 151
8.4.3 Forma práctica de la construcción de L . . . 154
8.5 Factorización $\mathbf{LR}$ 155
8.5.1 Matrices de permutación . . . 155
8.5.2 Factorización con el algoritmo de Gauss con pivote . . . 156
8.5.3 Sobre la construcción de la matriz L y P . . . 156
8.6 La factorización y la solución de sistemas lineales 159
8.6.1 Factorización LU . . . 159
8.6.2 Factorización LR . . . 160
8.7 La factorización y el cálculo de autovalores 162
8.7.1 Convergencia de esta sucesión . . . 162
9 Matrices definida positivas . . . 165
9.1 Formas cuadráticas 165

9.2 Matrices definida positivas 165
9.2.1 Algunos teoremas sobre matrices definida positivas 166
9.2.2 Caracterización de una matriz definida positiva 167
9.3 Matrices definida negativas y semidefinidas 167
9.4 La signatura de una matriz simétrica 168
9.4.1 La definición de signatura 168
9.4.2 Cálculo de la signatura con operaciones elementales 169
9.5 Caracterización de matrices simétricas con operaciones elementales 170
9.6 El criterio de Sylvester 171

1 — Algunas aplicaciones del Álgebra Lineal

A continuación se presentan algunas aplicaciones del Algebra Lineal, algunas de estas aplicaciones se desarrollarán en este texto. Se sugiere al profesor de la materia comentar algunas de éstas aplicaciones y la importancia del Álgebra Lineal en las mismas.

1.1 Programación Lineal[1]

La programación matemática es una herramienta de modelado usada en el proceso de toma de decisiones, trata exclusivamente con funciones objetivos y restricciones lineales. Se utiliza en campos como la ingeniería, la economía, la gestión, y muchas otras áreas de la ciencia, la técnica y la industria.

En todo problema de programación lineal se pueden identificar cuatro componentes básicos: (1) El conjunto de datos, (2) El conjunto de variables con sus dominios respectivos, (3) El conjunto de restricciones lineales del problema, (4) La función objetivo, que es una función lineal que debe ser optimizada (máximo o mínimo).

1.1.1 El problema del transporte

Supóngase que cierto producto debe enviarse en cantidades $u_1,\ldots, u_m$, desde m orígenes a n destinos $v_1, \ldots, v_n$. El problema consiste en determinar las cantidades x_{ij} que deben enviarse desde el origen i al destino j, para conseguir minimizar el coste del envío.

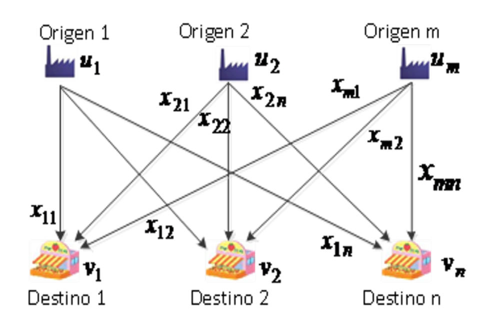
Los cuatro elementos principales de este problema son:

1) Datos:
   m : el número de orígenes
   n : el número de destinos
   u_i : la cantidad que debe enviarse desde el origen i
   v_j : la cantidad que debe ser recibida en el destino j
   c_{ij} : el coste de envío de una unidad de producto desde el origen i al destino j
2) Variables
   x_{ij} : la cantidad que se envía desde el origen i al destino j. Se supone que las variables deben ser no negativas: $x_{ij} \geq 0$, $i = 1,\ldots,m$, $j = 1,\ldots,n$
3) Restricciones. Las restricciones de este problema son:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m} x_{ij} &= u_i, i = 1\ldots,m \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} &= v_j;, j = 1\ldots,n \end{aligned}$$

   Lo anterior puede ilustrarse en el siguiente gráfico:

[1] Obtenido del libro: Formulación y Resolución de Modelos de Programación Matemática en Ingeniería y Ciencia, de Enrique Castillo, Antonio J. Conejo, Pablo Pedregal, Ricardo García y Natalia Alguacil.



4) Función objetivo. Se pretende minimizar la función:

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

1.1.2 El problema de la dieta

Supóngase que se conocen los contenidos nutritivos de ciertos alimentos, sus precios y la cantidad mínima diaria de nutrientes a consumir. El problema consiste en determinar la cantidad de cada alimento que debe adquirirse de manera que se satisfagan los requerimientos y al mismo tiempo se tenga un precio total mínimo.

Los cuatro elementos para este problema son:

1) Datos:
   m : el número de nutrientes
   n : el número de alimentos
   a_{ij} : la cantidad del nutriente i en una unidad del alimento j
   b_i : la cantidad mínima del nutriente i aconsejada
   cj : el precio de una unidad del alimento j
2) Variables. x_j : la cantidad del alimento j que debe adquirirse.
3) Restricciones. La cantidad total de un nutriente dado i debe ser al menos la suma de las cantidades de los nutrientes en todos los alimentos, además estas cantidades deben ser no negativas, es decir,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j &\geq b_i; \quad i = 1, \ldots, m \\ x_j &\geq 0; \quad j = 1, \ldots, n \end{aligned}$$

4) Función objetivo. El objetivo es minimizar la función

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

1.1.3 El problema del flujo en una red

Considérese una red de transporte (tuberías, ferrocarriles, autopistas, comunicaciones, etc.) a través del cual desea mandarse un producto homogéneo (aceite, grano, coches, mensajes, etc.) desde ciertos puntos de la red, llamados nodos fuente, hasta otros nodos de destino, llamados sumideros.

Además de estas dos clases de nodos, la red puede contener nodos intermedios, donde no se genera ni se consume el producto que está fluyendo por la red.

Denótese por x_{ij} el flujo que va desde el nodo i al nodo j (positivo en la dirección de i a j, y negativo en la dirección contraria).

Los cuatro elementos de este problema son:

1) Datos:
   Un grafo G que describe la red de transporte, este grafo contiene un conjunto de nodos y un conjunto de conexiones.

n: El número de nodos en la red
f_i : El flujo entrante (positivo) o saliente (negativo) en el nodo i.
m_{ij} : La capacidad máxima de flujo en la conexión entre el nodo i y el nodo j.
c_{ij} : El flujo que va desde el nodo i al nodo j

2) Restricciones.
$$\begin{aligned} \sum_j (x_{ij} - x_{ji}) &= f_i; \quad i = 1, \ldots, n \\ -m_{ij} &\leq x_{ij} \leq m_{ij}; \quad \text{para todo } i < j \end{aligned}$$
3) **Función objetivo.**
$$z = \sum_{i,j} c_{ij} x_{ij}$$

1.2 Regresión lineal con k variables

Considérense los siguientes n puntos de $\mathbf{R}^k$:

$$\begin{aligned} &(x_{12}, x_{13}, \ldots, x_{1k}, y_1), \\ &(x_{22}, x_{23}, \ldots, x_{2k}, y_2), \\ &\ldots \\ &(x_{n2}, x_{n3}, \ldots, x_{nk}, y_n) \end{aligned}$$

El problema de la regresión lineal con dos variables consiste en hallar una función $y = \beta_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k$ que minimize la función:

$$f(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k) = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \beta_1 - \beta_2 x_{i2} - \cdots - \beta_k x_{ik})^2$$

Se puede probar que:

$$\beta = (X^t X)^{-1} (X^t Y)$$

donde:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_{12} & x_{13} & \cdots & x_{1k} \\ 1 & x_{22} & x_{23} & \cdots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n2} & x_{n3} & \cdots & x_{nk} \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix}$$

Muchos problemas de regresión “no lineales” se pueden resolver mediante esta técnica.

1.3 El modelo Input-Output de Leontief

El modelo desarrollado por Leontief sirve para analizar las relaciones de interdependencia entre los distintos sectores productivos de un país o una región.

Supongamos una economía con n industrias. Sea

e_i : La demanda externa ejercida sobre la industria i,

a_{ij} : El número de unidades de la industria i que se necesitan para producir 1 unidad de la industria j, es decir, la demanda por unidad de j sobre i.

x_i : Producción de i (número de unidades fabricadas por la industria i)

Los datos pueden describirse en la siguiente tabla:

Producción	Demanda interna 1	Demanda interna 2	$\cdots$	Demanda interna n	Demanda externa
x_1	$a_{11}x_1$	$a_{12}x_2$	$\cdots$	$a_{1n}x_n$	e_1
x_2	$a_{21}x_1$	$a_{22}x_2$	$\cdots$	$a_{2n}x_n$	e_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
x_n	$a_{n1}x_1$	$a_{n2}x_2$	$\cdots$	$a_{nn}x_n$	e_n

así se plantea un sistema de n ecuaciones con n incógnitas. La $i-$*ésima* ecuación está dada por:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + e_i$$

Con $A = (a_{ij})$, $x = (x_i)$ y $e = (e_i)$ se encuentra el sistema:

$$(I-A)x = e$$

Aquí I es la identidad en $M_{n,n}$. La matriz A se llama **Matriz de tecnología**, x es el **vector de producción** y e es el **vector de demanda externa.** La matriz $L = I - A$ se llama matriz de Leontief. Nótese que si L es invertible el problema tiene solución única.

1.4 El secreto del Google y el Algebra Lineal

Todas las aplicaciones de las matemáticas se encuentran en los instrumentos utilizados más insospechados, una de éstas es el buscador Google, tan popular para todos los internautas. Un artículo completo relativo a esta aplicación se debe a Pablo Fernández del Departamento de Matemáticas, de la Universidad Autónoma de Madrid España, (http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/gallardo/), los aspectos matemáticos más importantes de esta aplicación se pueden resumir en los siguientes puntos:

Teoría de Grafos
Autovalores, Autovectores,
Teorema de Perron, Frobenius,
Métodos numéricos,
Matrices no negativas
Probabilidad, Cadenas de Markov

A continuación se presenta la **historia del buscador Google**
(http://www.elhacker.net/trucos_google.html)

Historia de Google. Los comienzos

- primavera 1995: Sergey Brin (23 años entonces) y Larry Page (24), confundadores de Google y actualmente presidente y CEO, se conocen en un acto que la Universidad de Stanford organiza para los candidatos de su Doctorado en Informática.
- otoño 1995: Larry y Sergey comienzan a trabajar en el 'Digital Library Project' de la Universidad de Stanford http://www-diglib.stanford.edu/. Larry Page, con experiencia en diseño web y el título de Ingeniero Eléctrico, y Sergey Brin, un experto en tratamiento de datos y Licenciado en Informática y Ciencias Matemáticas, comienzan a crear un algoritmo para la búsqueda de datos. Esta tecnología se convertirá mas tarde en el corazón que hará funcionar a Google.
  El nombre que Larry Page da a esta tecnologia fue 'PageRank'. En su página web personal de la Universidad de Stanford, colgará en 1997 una presentación que lo explica: 'PageRank: Bringing Order to the Web' http://hci.stanford.edu/~page/papers/pagerank/.
- enero 1996: Comienzan a desarrollar un buscador llamado 'BackRub' http://web.archive.org/web/19971210065425/ backrub.stanford.edu/backrub.html. Este nombre se lo dan debido a que la mayor habilidad de este motor de búsqueda es analizar los 'back links' (enlaces que apuntan a una determinada página).

Tal y como indican en su descripción http://web.archive.org/web/19971210065425/backrub.stanford.edu/ backrub.html, Backrub está escrito en Java y Python (incluso Larry Page postea alguna duda en los 'newsgroups' http://groups.google.com/groups?selm=page-0701962007020001%40qwerty. stanford.edu), y corre sobre varias máquinas Sun Ultra y Intel Pentium con Linux. La Base de Datos está alojada en un ordenador Sun Ultra II con 28GB de disco duro.
Si tienes cualquier duda sobre el funcionamiento de este buscador, y no está contestada en sus FAQ http://web.archive.org/web/19971210065437/backrub.stanford.edu/FAQ.html, puedes llamar al (415) 723-3154, y preguntar por Larry. Los primeros usuarios son los alumnos y profesores de Stanford, que disfrutan de la precisión con la que el buscador encuentra datos en la web.

- 1997: 'Backrub' se transforma en 'Google' http://web.archive.org/web/19971210065417/backrub.stanford.edu/. Le otorgan este peculiar nombre por su parecido a la palabra 'googol', que en inglés es el nombre que que se da a la cifra '10 elevado a 100' (un uno seguido de 100 ceros). Ya tienen indexadas 24 millones de páginas. Mucho antes, ya han tenido problemas de capacidad en sus discos duros, y han tenido que idear ingenios basados en Lego, como este http://www-db.stanford.edu/pub/voy/museum/pictures/display/0-4-Google.htm.
En los comienzos de Google (en el dominio google.stanford.edu http://web.archive.org/web/19981111183552/google.stanford.edu/), su diseño es aún más austero de lo que será posteriormente. En esta antigua versión se incluyen fotografías de los equipos que utilizan http://web.archive.org/web/19990209043945/http://google.stanford.edu/googlehardware.html.
Historia de Google. Fundando una empresa
- 1997: Larry y Sergey han registrado el dominio 'google.com'. Además, han dado a conocer su tecnología a la 'Office of Technology Licensing' (OTL) http://otl.stanford.edu/ de la Universidad de Stanford, que será la encargada de contactar con diferentes compañías de Internet que puedan estar interesadas en Google.
- enero 1998: A Sergey y Larry no les gusta ninguna de las ofertas recibidas, bien por ser económicamente bajas, o porque no van a desarrollar correctamente la tecnología. Por ello, deciden ser ellos los que creen su propia empresa.
Es entonces cuando el dormitorio de Larry Page se convierte en el nuevo hogar de Google, llevando todos los equipos informáticos junto a su cama. La habitación de Sergey Brin, situada al lado de la de Larry, se convierte en la oficina financiera.
Google sigue indexando páginas rápidamente, y Larry y Sergey necesitan mucha más capacidad en sus discos duros. Tienen que adquirir un terabyte, y finalmente consiguen comprar varios discos duros rebajados, todos por $15,000.
A pesar de la 'fiebre de los punto com' de aquellos días, Larry y Sergey no consiguen encontrar un inversor que financie Google, y tienen que conseguir todo el dinero de sus familias y amigos íntimos. Mientras tanto, habían abandonado su Doctorado en Stanford.
- verano 1998: En casa de un amigo común, Sergey y Larry conocen a Andy Bechtolsheim (cofundador de Sun Microsystems y vicepresidente de Cisco Systems), y comienzan a charlar sobre Google. Después de treinta minutos, Bechtolsheim les firma un cheque por $100,000, a nombre de 'Google Inc.'. Esta empresa, como tal, no existe, y para poder cobrar el cheque (que está dos semanas sobre la mesa de Larry), tienen que buscar un local, y fundar una nueva compañia: 'Google Inc.'.
- septiembre 1998: Google Inc. abre sus puertas en un garaje que un amigo les alquila en Menlo Park, en California. Rápidamente, instalan varias líneas telefónicas, un cable modem, una línea DSL, y una plaza de aparcamiento para su primer empleado, Craig Silverstein (actualmente, Director de Tecnologia de Google). 25 millones de páginas están indexadas (http://web.archive.org/web/19981111183552/google.stanford.edu), y Google

recibe diez mil consultas por día. La revista 'PC Magazine' lo incluye dentro de su lista 'Top 100 Web Sites' de 1998.

- febrero 1999: La plantilla asciende a 8 personas, responde a 500.000 consultas por día, se trasladan a unas nuevas oficinas en Palo Alto, y firma su primer contrato comercial con RedHat, el cual empieza a suministrar el Sistema Operativo Linux de los servidores de Google. Mientras tanto, continúan con su campaña comercial: el boca a boca.

Fuente: google.dirson.com

1.5 Cálculo a varias variables

En la revista Investigación & Desarrollo de 2003 se publica un artículo relativo a una aplicación del álgebra Lineal al problema de máximos y mínimos de funciones a varias variables, dicho artículo se muestra al final del texto. A continuación el resumen del trabajo mencionado.

Resumen

En este artículo se presenta una aplicación del álgebra Lineal al problema de máximos y mínimos de funciones a varias variables. Se considera una función $f : U \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, U abierto y dos veces diferenciable. Se toma un punto $a \in U$ tal que $f'(a) = 0$, se plantea el problema de determinar si en este punto existe un máximo, mínimo o ninguna de estas situaciones. Se calcula $f''(a)$, como se sabe esta segunda derivada es una matriz simétrica en $M_{n,n}$, dependiendo de la signatura se dará una respuesta al problema planteado.

Este problema se puede resolver empleando determinantes o empleando congruencia de matrices. Puesto que el cálculo de determinantes tiene un altísimo costo computacional, usualmente se emplea para casos de dos variables (el empleado en los textos básicos de cálculo), en tanto que la congruencia de matrices es siempre viable aún cuando n es muy grande pues se basa en simples operaciones elementales de fila y columna.

Finalmente, el propósito de este artículo, es presentar el problema de máximos y mínimos como un problema que no depende de cantidad de variables (al menos no conceptualmente).

1.6 Mensajes secretos. Criptografía

La criptografía, es la ciencia de cifrar o descifrar información utilizando técnicas que hacen posible, que sólo un cierto grupo de personas autorizadas puedan tener acceso a ella. En este texto se presenta una aplicación en la criptografía, para esto se emplea la aritmética modular y el cálculo de la inversa de una matriz.

1.7 Telecomunicaciones

Es conocido en el ámbito de las telecomunicaciones, el rol que tiene el Análisis de Fourier, esto es una aplicación del Cálculo y el Algebra Lineal, temas como Matrices, Espacios Vectoriales, Bases, etc. son parte esencial de este apasionante tema de la ingeniería.

1.8 Compresión de imágenes

La Transformada de Fourier y la Transformada Wavelets se usan actualmente en la compresores de imágenes, esta técnicas están basadas en las técnicas del Algebra Lineal y Cálculo.

2 — Matrices

El objetivo inicial de este capítulo es la de familiarizarse con la notación del Álgebra Lineal, se dan las definiciones que más adelante se emplearán. Luego de esto se estudia una de las herramientas más importantes en la materia, a saber, **las operaciones elementales de fila**, para luego estudiar la **reducción de Gauss**. Finalmente, se estudian la definición y las propiedades del determinante de una matríz cuadrada.

2.1 ¿Qué es una matriz?

Podemos encontrar en la literatura, distintas definiciones de lo que es una matriz dependiendo el campo de estudio. A continuación se brindará una definición general relacionada a su forma.

Definición 1 **(Matriz)** Una matriz es un arreglo rectangular de números (reales o complejos) dispuestos en filas(horizontal) y columnas(vertical).

Ejemplo 1 $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ -2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$

2.1.1 Notación.

Para denotar una matriz se usarán letras mayúsculas y los números que componen la matriz se denotarán con la misma letra minúscula con un par de subíndices en referencia a la posición que ocupa en el arreglo(matriz). La matriz se encerrará con un par de paréntesis o un par de corchetes.

Ejemplo 2

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ -2 & 5 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -3 \\ -2 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

Notación para los elementos de la primera fila:

$$a_{11} = 2, a_{12} = 3, a_{13} = -3$$

Notación para los elementos de la segunda fila:

$$a_{21} = -2, a_{22} = 5, a_{23} = 7$$

Si A es una matriz de m filas y n columnas, se escribirá:

$$A = (a_{ij})\,; i = 1,\ldots,m;\ j = 1,\ldots,n,$$

más aún, escribiremos $A \in M_{m,n}$, aquí $M_{m,n}$ es el conjunto de matrices de m filas y n columnas, los números a_{ij} se llamarán entradas o coeficientes de la matriz A, finalmente las entradas a_{ii} se llaman entradas de la **diagonal principal**.

Maxima Para ingresar una matriz en *Maxima*

(% i1) `A:matrix(`$[a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}], \dots, [a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn}]$ `)` Shift + Enter

(% o1) $$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Ejemplo

(% i1) `A:matrix(`$[1,2],[3,4]$`)`

(% o1) $$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Aplicación. Una compañia de artículos electrónicos fabrica televisores, celulares en dos plantas $P1$ y $P2$, la siguiente matriz representa la producción de las dos plantas por semana:

Artículo ↓	Plantas P1	P2
Televisores	50	60
Celulares	150	100
videojuegos	80	40

2.1.2 Orden de una matriz

Si $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, se dirá que la matriz A es de orden $m \times n$, "m por n", con coeficientes en $\mathbb{R}$ dotado de m filas y n columnas.

Ejemplo 3

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \in M_{22}$$

así A es de orden 2×2.

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 & 4 \\ 3 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \in M_{34}$$

luego B es de orden 3×4.

Maxima El orden de la matriz A se obtiene utilizando el comando

```
(% i2)  matrix_size (A) Shift + Enter

(% o2) [n filas, n columnas]
```

Ejemplo

```
(% i1)  A:matrix([1,2],[3,4])
```

$$(\%\ o1)\quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

```
(% i2)  matrix_size (A) Shift + Enter

(% o2)  [2,2]
```

2.2 Operaciones con matrices

2.2.1 Igualdad de matrices

Definición 2 **(Igualdad de matrices)** Sean A, $B \in M_{m,n}$, se dice que la matriz A es igual a la matriz B, lo que escribimos $A = B$, si

$$a_{ij} = b_{ij}$$

para $i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, n$.

Ejemplo 4 Las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 7 & 9 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 7 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

son iguales.

Las matrices

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

no son iguales pues $c_{31} \neq d_{31}$

Ejercicios 1 En cada caso hallar los valores de a, b, c y d, si existen, constantes reales, tales que:

$$1)\ \begin{bmatrix} a^2+2a & -1 \\ b & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 1+a & 2 \end{bmatrix}, \text{ en } M_2(\mathbb{R})$$

$$2)\ \begin{bmatrix} a^2+2a+b & -1 \\ a+b+c & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2+1 & 2c \\ b & d \end{bmatrix}, \text{ en } M_2(\mathbb{R})$$

2.2.2 Producto por un número o Producto escalar

Definición 3 Sea $A \in M_{m,n}$ y $r \in \mathbb{R}$, el producto del número r y la matriz A, es la matriz en $M_{m,n}$ tal que

$$(rA)_{ij} = ra_{ij},$$

para $i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, n$. En otras palabras se multiplica cada entrada por el número (escalar) en cuestión.

Nota. $r = -1$, en lugar de escribir $(-1)A$, se escribirá $-A$.

Ejemplo 5

$$(-2)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -4 & -6 & -8 \\ -10 & -12 & -14 & -16 \\ -18 & -20 & -22 & -24 \end{pmatrix}$$

Maxima El producto por un número

```
(% i1)  A:matrix([1,2],[3,4])
```

(% o1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

```
(% i2)  3*A
```

(% o1) $\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{bmatrix}$

2.2.3 Suma

Definición 4 Sean A, $B \in M_{m,n}$, la suma de A y B, escrito $A+B$, es la matriz en $M_{m,n}$ tal que:

$$(A+B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

para $i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, n$.

Es decir, al sumar dos o más matrices, se suma coeficiente a coeficiente de la misma posición.

Ejemplo 6

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 & 4 & 2 & 1 \\ 10 & -8 & 5 & 3 \\ 12 & 11 & -9 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 6 & 5 & 5 \\ 15 & -2 & 12 & 11 \\ 21 & 21 & 2 & 18 \end{pmatrix}$$

Maxima La Suma de dos matrices es

```
(% i1)  A:matrix([1,2],[3,4])
```

(% o1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

```
(% i2)  B:matrix([3,4],[2,1])
```

(% o2) $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

```
(% i3)  A+B
```

(% o3) $\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$

2.2.4 Resta o Diferencia de Matrices.

Definición 5 Sean A, $B \in M_{m,n}$, la resta de A y B, escrito $A-B$, es la matriz en $M_{m,n}$ tal que:

$$(A-B)_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$$

para $i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, n$.

De la definición se sigue que $A - B = A + (-B)$.

Ejemplo 7

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -7 & 4 & 2 & 1 \\ 10 & -8 & 5 & 3 \\ 12 & 11 & -9 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 1 & 3 \\ -5 & 14 & 2 & 5 \\ -3 & -1 & 20 & 6 \end{pmatrix}$$

Maxima La Resta de dos matrices es

```
(% i1)  A:matrix([1,2],[3,4])
```

(% o1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

```
(% i2)  B:matrix([3,4],[2,1])
```

(% o2) $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

```
(% i3)  A-B
```

(% o3) $\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

2.2.5 Producto de matrices

Antes de definir el producto de matrices es necesario dar las siguientes definiciones:

Definición 6 **(Vector fila y vector columna)** Sea $A \in M_{1,n}$, es decir, una matriz de una sola fila y n columnas, a una matriz de este orden será llamado **vector fila**, usualmente escribiremos

$$A = (a_1, a_2, \ldots, a_n).$$

Una matriz $A \in M_{n,1}$, será llamado **vector columna**, usualmente escribiremos

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Definición 7 **(Producto interior euclidiano)** Sean

$$A = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \text{ y } B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

definimos el producto interior euclidiano de estos vectores como el número:

$$A \cdot B = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n.$$

Definición 8 **(Notación para las filas y columnas de una matriz)** Sea $A \in M_{m,n}$, si $A^1, A^2, \ldots A^n$ son los vectores columna de A, entonces la matriz A se escribirá como

$$A = \left[A^1, A^2, \ldots, A^n\right].$$

Similarmente si $A_1, A_2, \ldots, A_m$ son los vectores fila de A, entonces A se escribirá como:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix}$$

Ahora estamos en condiciones de definir el producto de matrices.

Definición 9 **(Producto de matrices)** Sean $A \in M_{m,r}$, $B \in M_{r,n}$, tales que:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix}, \quad B = \left[B^1, B^2, \ldots, B^n\right],$$

el producto de A y B, escrito AB, es la matriz en $M_{m,n}$ definido por:

$$\begin{aligned} (AB)_{ij} &= A_i \cdot B^j \\ &= (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{ir}) \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{rj} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ir} \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array}\right) \left(\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & & b_{1j} & & \\ \hline & & b_{2j} & & \\ \hline & & \vdots & & \\ \hline & & b_{rj} & & \\ \hline \end{array}\right)$$

es decir, la entrada ij de la matriz producto es el producto interior euclidiano de la fila i de A con la columna j de B, por tanto:

$$AB = \begin{pmatrix} A_1 \cdot B^1 & A_1 \cdot B^2 & \cdots & A_1 \cdot B^n \\ A_2 \cdot B^1 & A_2 \cdot B^2 & \cdots & A_2 \cdot B^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_m \cdot B^1 & A_m \cdot B^2 & \cdots & A_m \cdot B^n \end{pmatrix}$$

Ejemplo 8 Considere las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 6 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Para calcular el producto AB se realizan los siguientes pasos:

Primera columna En este cálculo la primera columna de B no cambia.

Entrada $(AB)_{11}$:

$$(2, -4, 6) \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = (2)(4) + (-4)(3) + (6)(-2) = -16$$

Entrada $(AB)_{21}$:

$$(5, 1, 0) \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = (5)(4) + (1)(3) + (0)(-2) = 23$$

Segunda columna En este cálculo la segunda columna de B no cambia.

Entrada $(AB)_{12}$:

$$(2,-4,6)\begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} = (2)(7)+(-4)(6)+(6)(1) = -4$$

Entrada $(AB)_{22}$:

$$(5,1,0)\begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} = (5)(7)+(1)(6)+(0)(6) = 41$$

De lo anterior:

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 6 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 & -4 \\ 23 & 41 \end{pmatrix}$$

Observación. Es inmediato, de la definición, que la primera columna de AB es el producto AB^1, la segunda columna AB^2, y así sucesivamente, es decir:

$$AB = \left[AB^1, AB^2, \ldots, AB^n\right]$$

Observación. Es importante notar que el número de columnas de A (el primer factor) es igual al número de filas de B (el segundo factor), más aún, el orden de la matriz AB es el número de filas de A por el número de columnas de B.

Observación. Usando la notación sumatoria, la entrada ij de AB, es:

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{r} a_{ik}b_{kj},$$

donde $A \in M_{m,r}$, $B \in M_{r,n}$,

Maxima El producto de matrices es

```
(% i1)  A:matrix([2,-4,6],[5,1,0])
```

(% o1) $\begin{bmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 5 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

```
(% i2)  B:matrix([4,7],[3,6],[-1,2])
```

(% o2) $\begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 6 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

```
(% i3)  A.B
```

(% o3) $\begin{bmatrix} -16 & -4 \\ 23 & 41 \end{bmatrix}$

Aplicación. Un restaurante tiene la siguiente disponibilidad de tipos de comida en un día domingo: 120 platos de pique macho, 80 platos de mixto y 30 platos de pescados. Un plato de pique cuesta 45 Bs, un plato de mixto cuesta 35 Bs y un plato de pescado cuesta 50 Bs. Emplearemos

producto matricial para determinar la cantidad de dinero que se espera obtener si se venden todos los platos. Las matrices que representan la cantidad y el precio son respectivamente:

$$\begin{array}{ll} & \quad\;\; \text{pique} \quad \text{mixto} \quad \text{Pescados} \\ \text{Cantidad} & C = \begin{pmatrix} 120 & 80 & 30 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} & \quad \text{costo Bs} \\ \begin{array}{l} \text{pique} \\ \text{mixto} \\ \text{pescados} \end{array} & P = \begin{pmatrix} 45 \\ 35 \\ 50 \end{pmatrix} \end{array}$$

El costo total de todos los platos es:

$$CP = \begin{pmatrix} 120 & 80 & 30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 45 \\ 35 \\ 50 \end{pmatrix} = 9700 \text{ Bs}$$

2.2.6 La transpuesta de una matriz

Definición 10 Sea $A \in M_{m,n}$, la transpuesta de A, escrito A^t, es la matriz en $M_{n,m}$ definido por:

$$A^t_{ji} = A_{ij}$$

para $i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, n$.

Note que la transpuesta se obtiene al intercambiar las filas por las columnas de una matriz. La anterior definición motiva el siguiente proceso para el cálculo de la matriz transpuesta:

- La primera **columna** de A^t es la primera **fila** de A
- La segunda **columna** de A^t es la segunda **fila** de A
- Etc.

Ejemplo 9

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \in M_{32} \\ A^t &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \in M_{23} \end{aligned}$$

Maxima La traspuesta de una matriz A

```
(% i1)  A:matrix([2,1],[-1,3],[4,5])
```

(% o1) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

```
(% i2)  transpose(A)
```

(% o1) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

2.2.7 Propiedades de las operaciones matriciales

Suma

Teorema 1 Sean A, B, C matrices del mismo orden, entonces:

1) $A + B = B + A$ {Conmutatividad}

2) $A+(B+C)=(A+B)+C$ {Asociatividad}
3) $(A+B)^t = A^t + B^t$

Demostración. Ejercicio

Producto

Teorema 2 Sean A,B,C matrices del orden adecuado, entonces:
1) $A(BC)=(AB)C$ {Asociatividad}
2) $A(B+C)=AB+AC$ {Distributividad del producto respecto de la suma}
3) $(AB)^t = B^tA^t$

Demostración.
1) Ejercicio.
2) Supóngase que $A\in M_{m,r}$, $B,C\in M_{r,n}$, entonces:

$$\begin{aligned}
[A(B+C)]_{ij} &= \sum_{k=1}^{r} A_{ik}(B+C)_{kj} \\
&= \sum_{k=1}^{r} A_{ik}\left(B_{kj}+C_{kj}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{r} A_{ik}B_{kj}+A_{ik}C_{kj} \\
&= (AB)_{ij}+(AC)_{ij}
\end{aligned}$$

luego $A(B+C)=AB+AC$.
3) Supóngase que $A\in M_{m,r}$, $B\in M_{r,n}$, entonces:

$$\begin{aligned}
(AB)^t_{ji} &= (AB)_{ij} \\
&= \sum_{k=1}^{r} A_{ik}B_{kj} \\
&= \sum_{k=1}^{r} B_{kj}A_{ik} \\
&= \sum_{k=1}^{r} B^t_{jk}A^t_{ki} \\
&= \left(B^tA^t\right)_{ji}
\end{aligned}$$

luego $(AB)^t = B^tA^t$.
■

Sobre el producto matricial no conmutativo

En general no es cierto que el producto sea conmutativo, como lo prueba el siguiente ejemplo:

Ejemplo 10 Si

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

entonces:

$$\begin{aligned}
AB &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -6 & 0 \\ -12 & 10 \end{pmatrix} \\
BA &= \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Sobre el producto cero en matrices

Definición 11 **(Matriz cero)** Una matriz es la matriz cero si todas sus entradas son ceros.

Es sabido que si el producto de dos números es cero, entonces al menos uno de los factores es cero, esta propiedad ya no es verdadera en teoría matricial, esto es, si el producto de dos matrices es cero, entonces no necesariamente uno de ellos es cero.

Ejemplo 11 Sean

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1/2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Claramente:

$$AB=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y ni A ni B son la matriz cero.

Maxima La nula es

```
(% i1)  O:zeromatrix(m, n)
```
matriz nula de orden $m\times n$.

Ejemplo:

```
(% i1)  O:zeromatrix(2,3)
```

(% o1) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Ejercicios propuestos

1) Una matriz $A\in M_{3,3}$ tiene la siguiente propiedad: $a_{ij}=\frac{1}{i+j}$ y una matriz $B\in M_{3,3}$ tiene la propiedad $b_{ij}=\begin{cases} \frac{1}{i-j} & \text{si } i\neq j \\ 0 & \text{si } i=j \end{cases}$:
   (a) Construya la matrices A y B.
   (b) Calcule $A+B$, $A-B$
   (c) Dé las expresiones en términos de i y j para $(A+B)_{ij}$ y $(A-B)_{ij}$.
2) Demostrar que $(A+B)^t=A^t+B^t$
3) Demostrar $A(BC)=(AB)C$, donde las matrices son del orden adecuado.
4) Sea $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, determinar una matriz B tal que

$$A+B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & -3 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

   Sol. $\begin{pmatrix} 0 & -3 & -1 \\ -6 & -2 & -9 \\ -3 & -12 & -4 \end{pmatrix}$
5) Hallar el conjunto de todas las matrices que conmutan con $A=\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -6 & 8 \end{pmatrix}$
6) Sea $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, determinar una matriz B tal $AB=BA$.

   Sol. Una tal matriz es $B=\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

7) Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, ¿existe una matriz no nula B tal que $AB = 0$?, en caso afirmativo encontrarla.

8) Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$, ¿existe una matriz no nula B tal que $AB = 0$?, en caso afirmativo encontrarla.

9) Considere la matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

utilizando ***Maxima*** mostrar que $AB = AC$, es decir, de la igualdad $AB = AC$ no se puede concluir con $B = C$.

10) Sea $A \in M_{n,n}$ una matriz tal que $AB = 0$ para toda matriz $B \in M_{n,n}$, probar que $A = 0$.

11) Sean A, B matrices en $M_{2,2}$ que conmutan con $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Demuestre que $AB = BA$.

(Sug. Muestre que cualquier matriz que conmuta con $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ tiene la forma $a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} +$ $b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ donde a y b son números)

12) Una matriz $A \in M_{n,n}$ es llamada **matriz de probabilidad** si: (i) cada $a_{i,j} \geq 0$, (ii) $\sum_{k=1}^{n} a_{ik} = 1$ para $i = 1, 2, \ldots, n$, es decir la suma de cada fila es la unidad. Si $A, B \in M_{n,n}$ son matrices de probabilidad
(a) Probar que A^2 es una matriz de probabilidad.
(b) Probar que AB es una matriz de probabilidad

13) Una entidad educativa prepara tres exámenes para una materia, y considera los primeros dos exámenes a un 30 % cada uno, y el tercero a un 40 %. Suponga se tienen n estudiantes en una materia y $N \in M_{n,3}$ es la matriz de notas del curso al finalizar la materia. ¿Cómo calcularía el promedio del curso mediante un producto matricial?

14) Una tienda de mascotas tiene 10 palomas, 8 gorriones y 5 loros. Si una paloma cuesta 12 Bs, los gorriones 15 Bs y los loros 18 Bs cada uno. Emplear producto matricial para hallar el valor de inventario de la tienda referente a estas tres mascotas. Sol. 330 Bs.

15) Un negocio vendió 17 artículos del tipo A, 20 del tipo B, 2 del tipo C y 19 del tipo D. Si los precios por unidad de A, B, C y D son respectivamente 12, 10, 15 y 13 Bs. Encuentre el valor total de la venta. Sol. 681 Bs.

16) Un negocio tiene para la venta televisores en la siguiente cantidad y modelo

Tamaño →	40”	35”	20”	15”
Cantidad →	5	6	12	25
Precio de venta \$US→	1200	999	400	250

Se pide expresar el total de venta de los televisores como un producto matricial, luego indicar el ingreso total, si todos los televisores se venden.

17) Una fábrica produce dos modelos de autos de juguete, $G1$ y $G2$, en tres tipos: A, B y C. La cantidad de juguetes del modelo $G1$ producidos por semana son: 200 unidades del tipo A, 100 del tipo B y 150 unidades del tipo C; la cantidad e juguetes del modelo $G2$ producidas por semana son 150, 250 y 400, respectivamente, de los tipos A, B y C. El modelo A lleva 20 horas de taller y 1 hora de administración. El modelo B lleva 25 horas de taller y 1,5 horas de administración. El modelo C lleva 30 horas de taller y 2 horas de administración.
   a) Describir la información dada en forma matricial.
   b) Determinar las horas de taller y de administración empleadas para cada uno de los modelos.

Sol. Se requieren para el modelo $G1$: 11000 horas de taller y 650 horas de administración, y para el modelo $G2$ se requieren 21250 horas de taller y 1325 horas de administración.

2.3 Matrices especiales

2.3.1 Matriz cuadrada

Definición 12 **(Matriz cuadrada)** Una matriz A se denomina cuadrada si $A \in M_{n,n}$, es de decir, si tiene igual número de filas y columnas.

Potencias

Una matriz cuadrada puede elevarse a una potencia entera positiva (luego se verán otro tipo de potencias), Para esto definimos,

Definición 13 **(Potencia)** Sea $A \in M_{n,n}$, k un entero positivo, definimos $A^1 = A$ y para $k \geq 1$, la $k - ésima$ potencia de A, escrito A^k, está definida por

$$A^k = A\left(A^{k-1}\right)$$

De la definición se deduce:

$$\begin{aligned} A^2 &= AA \\ A^3 &= AA^2, \, etc \end{aligned}$$

Maxima La potencia de A es

```
(% i1)  A:matrix([2,-4,6],[5,1,0],[1,1,0])
```

(% o1) $\begin{bmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 5 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

```
(% i2)  A^^2
```

(% o2) $\begin{bmatrix} -10 & -6 & 12 \\ 15 & -19 & 30 \\ 7 & -3 & 6 \end{bmatrix}$

Matriz simétrica

Definición 14 **(Matriz simétrica)** Una matriz cuadrada $A \in M_{n,n}$ se dice simétrica si $A^t = A$.

Ejemplo 12 La matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

es simétrica pues $A^t = A$.

Ejemplo 13 La matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

no es simétrica pues:

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = A$$

Teorema 3 La suma de matrices simétricas es simétrica, en tanto que el producto de matrices simétricas no necesariamente es simétrica.

Demostración. Sea $A,B \in M_{n,n}$ matrices simétricas entonces:

$$\begin{aligned}(A+B)^t &= A^t + B^t\\ &= A+B\end{aligned}$$

Para probar la segunda parte es suficiente un contraejemplo, sean

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

ambas matrices son simétricas, sin embargo

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} 6 & 14 \\ 8 & 23 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

no es simétrica.



2.3.2 Matrices triangulares

Definición 15 **(Matriz triangular superior e inferior)** Una matriz cuadrada $A \in M_{n,n}$ es triangular superior si:

$$a_{ij} = 0, \text{ para } i > j$$

y es triangular inferior si:

$$a_{ij} = 0, \text{ para } i < j$$

$i,j = 1,2,\ldots,n.$

Ejemplo 14 Las matrices

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

son, respectivamente, triangular superior y triangular inferior.

2.3.3 Matriz diagonal e identidad

Definición 16 **(Matriz diagonal)** Una matriz $D \in M_{n,n}$ es diagonal si

$$d_{ij} = 0, \text{ para todo } i \neq j,$$

es decir, una matriz diagonal es aquella que es simultáneamente triangular superior e inferior. Las matrices diagonales se denotarán como

$$D = diag\,(d_1, d_2, \ldots, d_n)\,,$$

donde $d_1, d_2, \ldots, d_n$ son los elementos de la diagonal principal.

Maxima Una matriz diagonal se define

(% i1) D:diag_matrix($d_1, d_2, \ldots, d_n$)

(% o1) $\begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & d_n \end{bmatrix}$

Ejemplo
(% i2 D:diag_matrix(2,3,0,1)

(% o2 $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Definición 17 **(Matriz identidad)** La matriz $I_n \in M_{n,n}$ definida por

$$(I_n)_{i,j} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

se llama matriz identidad en $M_{n,n}$. Una matriz que es múltiplo escalar de la identidad de llama **matriz escalar**.

Ejemplo 15 La matriz

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es la identidad en $M_{3,3}$. La matriz

$$cI_3 = \begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

es una matriz escalar en $M_{3,3}$.

Maxima Una matriz identidad de orden n=4
(% i1) I:ident(4)

(% o1) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(% i1) F:diag_matrix(4,c)

(% o1) $\begin{bmatrix} c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \end{bmatrix}$

2.3.4 La traza y contratraza de una matriz cuadrada

Definición 18 **(traza)** Sea $A = (a_{i,j}) \in M_{n,n}$, la traza se define por

$$\begin{aligned} tr(A) &= a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \end{aligned}$$

Maxima La traza de una matriz A

```
(% i1)  A:matrix([2,-4,6],[5,1,0],[1,1,1])
```

$$(\%\ o1)\quad \begin{bmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 5 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

```
(% i2)  mat_trace(A)

(% o3)  4
```

Definición 19 **(contratraza)** Sea $A = (a_{i,j}) \in M_{n,n}$, la contratraza se define por

$$\begin{aligned} \operatorname{ctr}(A) &= a_{1n} + a_{2,n-1} + \cdots + a_{n1} \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{i,n-i+1} \end{aligned}$$

2.4 La función matricial ω

Definición 20 (La matriz contraidentidad) [1] Una matriz $W_n = (w_{r,s}) \in M_{n,n}$ tal que $w_{r,s} = 1$ si $r = n - s + 1$ y 0 en otro caso, es llamada matriz contraidentidad de orden n. Si e_i es el $i-ésimo$ vector canónico de $\mathbf{R}^n$, entonces la matriz contraidentidad puede escribirse como

$$W_n = [e_n\ e_{n-1}\ \ldots, e_1].$$

Ejemplo 16

$$W_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz contraidentidad tiene las siguientes propiedades:

1) W_n es simétrica.

2) $W_n W_n = I_n$.

Definición 21 Definimos la función ω de $M_{m,n}$ en $M_{n,m}$ mediante $A \to A^{\omega}$, donde A^{ω} es la matriz en $M_{n,m}$cuyo elemento $a_{i,j}^{\omega}$ es:

$$a_{i,j}^{\omega} = a_{m-j+1,n-i+1}.$$

Ejemplo 17 Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$ entonces con $m = 3$, $n = 4$:

$$\begin{aligned} a_{11}^{\omega} &= a_{34} = 12 \\ a_{12}^{\omega} &= a_{24} = 8 \\ a_{13}^{\omega} &= a_{14} = 4 \\ & etc\ldots \end{aligned}$$

[1] Esta función fue definida por Santiago Relos P. en 1994.

luego: $A^{\omega}=\begin{pmatrix} 12 & 8 & 4 \\ 11 & 7 & 3 \\ 10 & 6 & 2 \\ 9 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

Esta función tiene muchas propiedades, enunciamos algunas.

Teorema 4 Sea $A\in M_{m,n}$, entonces $A^{\omega}=W_nA^tW_m$.

Demostración. Para $i=\dot{1},\ldots,n,\;\; j=\dot{1},\ldots,m$,se tiene:

$$A^t=\left(a^t_{ij}\right)=\left(a_{ji}\right)$$

$\therefore$

$$A^tW_n=\left(a_{m-j+1,i}\right)$$

$\therefore$

$$\begin{aligned} W_nA^tW_n &= \left(a_{m-j+1,n-i+1}\right) \\ &= \left(A^{\omega}_{ij}\right) \\ &= A^{\omega}. \end{aligned}$$

■

Teorema 5 Si $A\in M_{m,n}$, $(A^{\omega})^{\omega}=A$

Teorema 6 Sea $A\in M_{m,r}, B\in M_{r,n}$ entonces $(AB)^{\omega}=B^{\omega}A^{\omega}$.

Teorema 7 Sea $A\in M_{n,n}$,entonces $tr\left(A^{\omega}\right)=tr\left(A\right)$.

Ejercicios propuestos

1) Sea $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, utilizando ***Maxima*** calcular A^2, A^3.

Sol.: $\begin{pmatrix} 14 & 25 & 31 \\ 25 & 45 & 56 \\ 31 & 56 & 70 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 157 & 283 & 353 \\ 283 & 510 & 636 \\ 353 & 636 & 793 \end{pmatrix}$

2) Hallar todas las matrices cuadradas de orden 2 cuyo cuadrado sea nulo.

Sol. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a & -\frac{a^2}{b} \\ b & -a \end{pmatrix}$

3) Sean:

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Encuentre una matriz D tal que $-A+3B-2C+D=0$

b) Encuentre una matriz E tal que $2A-5B+2C+2E=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$

c) Encuentre una matriz X tal que $2\left(A-B+X\right)=5\left(B-C-2X\right)$

Sol. $D=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & -2 \\ 2 & -13 \end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} \\ \frac{7}{2} & 3 \\ -1 & 12 \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ \frac{5}{6} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$

4) Calcule valores de x, y tales que las siguientes matrices sean simétricas:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x-y-1 & x+y \\ 2y & 1 & 2 \\ -2x & 2 & x^2-y^2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2x-y & 0 \\ x+y+1 & 1 & -3x+5y \\ 0 & -x+y-2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 2x+y-1 & 3x+y \\ x-y & 2 & 0 \\ 2x-y-1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Sol. Matriz $A : x = \frac{1}{10}, y = -\frac{3}{10}$, Matriz $B : x = 1+2t,\ y = t$, donde $t \in \mathbf{R}$, Matriz C : No existen

5) Probar: Si $A \in M_{m,n}$ es simétrica, entonces A^2 es simétrica.

6) Probar que el producto de matrices triangulares superiores es triangular superior.
Sug. Si A y B son triangulares superiores, entonces si $i > j$:

$$(AB)_{i,j} = (0, \ldots, 0, A_{ii}, \ldots, A_{in}) \begin{pmatrix} B_{1,j} \\ \vdots \\ B_{j,j} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

7) Probar que el producto de matrices triangulares inferiores es triangular inferior.

8) Sea $A \in M_{n,n}$, I la matriz identidad en $M_{n,n}$. (a) Calcular $(I+A)^2$, (b) $(I+A)^m$, m un número natural.

9) Una matriz $A \in M_{n,n}$ tal que $A^p = 0$, $p \in \mathbb{N}$, se llama nilpotente. Si p es el menor entero para el cual $A^p = 0$, la matriz se llama nilpotente de orden p. Si A es nilpotente de orden 2, probar que $A(I \pm A)^n = A$.

10) Sea A nilpotente de orden 2, X y Y matrices cuadradas tal que $X = Y + A$ y supóngase que Y y A conmutan, probar que $X^n = Y^{n-1}(Y + nA)$ para todo natural (Se asume que Y^0 es la identidad)

11) Supóngase que $A \in M_{2,2}$ conmuta con todas las matrices en $M_{2,2}$. Pruebe que A es una matriz escalar.

12) Una matriz A es idempotente si $A^2 = A$. Supóngase que A es idempotente y $B = I - A$:
    a) Muestre que B es idempotente,
    b) Muestre que $AB = BA$

13) Determinar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones. Justifique su respuesta.
    a) Si AB es simétrica, entonces A y B son simétricas.
    b) Si A es simétrica y P es cuadrada, entonces PAP^t es simétrica.

14) Determinar a, b tales que

$$\begin{pmatrix} c & 1 \\ -1 & 2d \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ -1 & -1 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

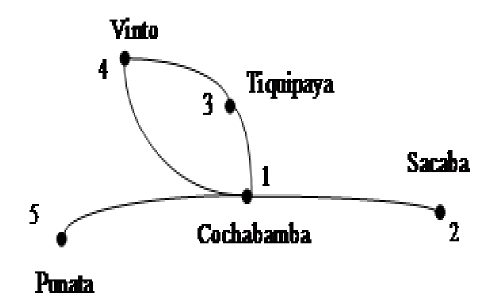
Sol. $a = 1$, $b = -1$, $c = -3$, $d = -\frac{5}{2}$.

15) Considérese la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

    a) Utilizando ***Maxima*** calcule A^2, A^3, A^4 y A^5.
    b) Hallar una fórmula para A^n, donde $n \in \mathbf{N}$.

16) Considere la siguiente gráfica, contruya una matriz $G \in M_{5,5}$ que tenga la propiedad $G_{ij} = 0$ si las poblaciones no están conectadas y $G_{i,j}$ si las poblaciones están conectadas. Construya la matriz G.



17) Sean I la matriz identidad en $M_{n,n}$, $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in M_{n,1}$ la matriz cuyas coordenadas son unos. Calcular: $A = I - \frac{1}{n} U U^t$. Probar
   a) A es simétrica
   b) $A^2 A = A$
   c) La traza es $n-1$
18) Es verdad que $(A+B)^2$ es igual a $A^2 + 2AB + B^2$. En caso de respuesta negativa, determinar matrices A y B tales que
   a) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ y
   b) $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$.
19) Sean A, B matrices cuadradas en $M_{n,n}$. Pruebe que:
   a) $tr(A^t) = tr(A)$
   b) $tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$
   c) $tr(AB) = tr(BA)$
   d) $tr(AA^t) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2$
20) Sea $k \in \mathbf{R}$, A y B matrices cuadradas tal que $AB = kB$. Pruebe que $A^n B = k^n B$ para todo $n \in \mathbf{N}$.

2.5 Reducción de Gauss

2.5.1 Operaciones elementales, Matrices elementales y equivalencia de matrices

Definición 22 **(Operaciones elementales de fila)** Sea $A \in M_{m,n}$. Sobre las filas de esta matriz se definen las siguientes operaciones:

1) **Primera operación elemental de fila.** A la fila i se multiplica por el escalar $r \neq 0$. Se emplea la notación $f_{i(r)}$, nótese que:

$$a_{ik} = r(a_{ik}), k = 1, \ldots, n.$$

De lo anterior se sigue que la fila f_i se reemplaza con $r f_i$.

$$f_i \leftarrow r f_i$$

Observación 1 Otras notaciones empleadas son $f_{(r)i}$, $f_i(r)$.

2) **Segunda operación elemental de fila.** Las filas i, j se intercambian. Se emplea la notación f_{ij}, es claro que:

$$f_i \leftrightarrows f_j$$

3) **Tercera operación elemental de fila.** A la fila i se suma la fila h multiplicada por un número r. Emplearemos la notación $f_{ih(r)},$ nótese que

$$a_{ik} = a_{ik} + r\,(a_{hk})\,,\; k = 1,\ldots,n$$

De lo anterior se sigue que:

$$f_i \leftarrow f_i + r\,f_h$$

Observación 2 Otras notaciones empleadas son $f_{i+h(r),}, f_{i+(r)h}$.

Las operaciones elementales de columna se definen como las anteriores, reemplazando fila por columna.

Definición 23 **(Operaciones elementales de columna)** Sea $A \in M_{m,n}$. Sobre las columnas de esta matriz se definen las siguientes operaciones:

1) **Primera operación elemental de columna.** A la columna i se multiplica por un escalar $r \neq 0$. Se emplea la notación $C_{i(r)}$, note que:

$$C_i \leftarrow r\,C_i$$

2) **Segunda operación elemental de columna.** Las columnas i, j se intercambian. Se emplea la notación C_{ij}, se sigue:

$$C_i \leftrightarrows C_j$$

3) **Tercera operación elemental de columna.** A la columna i se suma la columna h multiplicada por un número r. Emplearemos la notación $C_{ih(r)},$ nótese que

$$a_{ki} = a_{ki} + r\,(a_{kh})\,,\; k = 1,\ldots,m$$

es claro que:

$$C_i \leftarrow C_i + r\,C_h$$

Definición 24 **Matrices Elementales**
Una matriz elemental fila de orden n, es una matriz que se obtiene al efectuar una operación elemental fila sobre la matriz identidad (I_n).

Se anota:
- $F_{rs} = f_{rs}(I_n)$
- $F_{(k)r} = f_{(k)r}(I_n)$
- $F_{r+(k)s} = f_{r+(k)s}(I_n)$

Consideremos una matriz $A \in M_{m\times n}$. Luego se cumple que:
- $f_{rs}(A) = F_{rs} \cdot A$
- $f_{(k)r}(A) = F_{(k)r} \cdot A$
- $f_{r+(k)s}(A) = F_{r+(k)s} \cdot A$

Observación 3 Otras características importantes de estas matrices están dadas por:

1) Al aplicar una operación elemental fila a una matriz A, da el mismo resultado que multiplicar (por la izquierda) la matriz A por la correspondiente matriz elemental fila.

2) Las Matrices Elementales Fila son regulares, y sus inversas son también matrices elementales fila.

   Se tiene:

   - $(F_{rs})^{-1} = F_{rs}$
   - $(F_{(k)r})^{-1} = F_{\frac{1}{k}r}$
   - $(F_{r+(k)s})^{-1} = F_{r+(-k)s}$

Definición 25 **(Matrices equivalentes)** Se dice que dos matrices A y B son equivalentes, lo que escribiremos $A \sim B$, si una de ellas se obtiene de la otra mediante una sucesión finita de operaciones elementales de fila.

Se demuestra que si $A \sim B$ entonces $B \sim A$; también si $A \sim B$ y $B \sim C$, entonces $B \sim C$.

Ejemplo 18 Sobre la matriz A, se realizan sucesivamente las siguientes operaciones elementales de fila.

1) f_{13} {Intercambio de la filas 1 y 3}
2) $f_{32(-4)}$ {A la fila 3 se suma la fila 2 multiplicada por -4}

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{f_{13}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \underset{f_{32(-4)}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ -5 & -4 & 5 \end{pmatrix} = B$$

nótese que $B \sim A$.

2.5.2 Las operaciones elementales como aniquiladores

Es posible usar las operaciones elementales de modo que ciertas entradas se conviertan en cero, este proceso se llamará aniquilamiento de entradas en una matriz.

Ejemplo 19 En este ejemplo se emplean operaciones elementales para llevar una matriz a su forma triangular superior.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 9 & 6 \\ -3 & -8 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[f_{21(-4)}]{f_{31(3)}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & -2 & 10 \end{pmatrix} \underset{f_{32(2)}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = B$$

Nuevamente $A \sim B$. Nótese que la operación elemental:

- $f_{21(-4)}$ anula la entrada a_{21}
- $f_{31(3)}$ anula la entrada a_{31}
- $f_{32(2)}$ anula la entrada a_{32}

2.5.3 Forma escalonada y escalonada reducida por filas

Definición 26 **(Elemento distinguido)** Un elemento distinguido es el primer número distinto de cero en una fila.

Definición 27 **(Forma escalonada)** Una matriz A se dice que está en la forma escalonada si el número de ceros antes del elemento distinguido de una fila crece fila tras fila.

Ejemplo 20

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

- En la primera fila existen 0 ceros antes del primer número distinto de cero (el 2).
- En la segunda 2 ceros antes del primer número distinto de cero (el 9) .
- En la tercera 3 ceros antes del primer número distinto de cero (el 4).

Por tanto A está en la forma escalonada.

Ejemplo 21

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

No está en la forma escalonada ¿porqué?.

Maxima La forma escalonada de una matriz A es

```
(% i1)  A:matrix([2,-4,6,3],[5,1,0,-5],[3,1,2,5])
```

(% o1) $\begin{bmatrix} 2 & -4 & 6 & 3 \\ 5 & 1 & 0 & -5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

```
(% i2)  echelon(A)
```

(% o2) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{12} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Otra opción de encontrarla es

```
(% i3)  triangularize(A)
```

(% o3) $\begin{bmatrix} 4 & -8 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 24 & 22 \\ 0 & 0 & 0 & 106 \end{bmatrix}$

Definición 28 **(Forma escalonada reducida por filas)** Una matriz A está en la forma escalonada reducida por filas si:

1) Está en la forma escalonada y
2) Los elementos distinguidos son iguales a la unidad y son los únicos números distintos de cero en su respectiva columna.

Ejemplo 22 La matriz

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

está en la forma escalonada reducida por filas (los elementos distinguidos están en negrillas).

Ejemplo 23 La matriz

$$B = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

no está en la forma escalonada reducida por filas ¿por qué? (los elementos distinguidos están en negrillas).

2.5.4 Reducción de Gauss

La reducción de Gauss consiste en llevar una matriz a su forma escalonada mediante operaciones elementales, se tienen dos formas

1) Reducción de Gauss simple
2) Reducción de Gauss con pivote

Reducción de Gauss simple

Consiste en aplicar operaciones elementales a una matriz de modo de llevarla a su forma escalonada, sin más argumento que el hecho de poder hacerlo.

Ejemplo 24

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{f_{21}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{f_{31(-2)}}{\longrightarrow}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & 3 & -1 \end{pmatrix} \underset{f_{32(-5)}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -7 & -21 \end{pmatrix}$$

la última matriz se encuentra en su forma escalonada.

Ejemplo 25

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \underset{\substack{f_{21(1)} \\ f_{41(-4)}}}{\overset{f_{31(-2)}}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 1 \\ 0 & 6 & -10 & 2 \end{pmatrix} \underset{f_{23}}{\longrightarrow}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -10 & 2 \end{pmatrix} \underset{f_{42(-2)}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

nuevamente la última matriz se encuentra en su forma escalonada.

Reducción de Gauss con pivote

Como se sabemos, para anular una entrada bajo a_{ij} se emplea la operación elemental $f_{i(i+k)(d)}$, con $d = \frac{b}{a_{ij}}$ y $k \in \mathbb{N}$, es claro que a_{ij} debe ser distinto de cero, en el método de Gauss simple ésta es la única condición. La entrada a_{ij} se llamará pivote, para minimizar los errores de redondeo, esta entrada debe ser la mayor, en valor absoluto, de entre todos los siguientes números

$$|a_{i,j}|, |a_{i+1,j}|, \ldots, |a_{mj}|$$

donde m es el número de filas de la matriz, si el máximo ocurre en $|a_{h,j}|$ se intercambian las filas i y h y luego se procede a la anulación de los elementos bajo $a_{i,j}$ como en la sección anterior.

Ejemplo 26 Considérese la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \\ -5 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

(Paso 1) Obsérvese que $5 = \textit{máx}\{|1|, |4|, |-5|\}$, el máximo ocurre en la tercera fila, luego se intercambiarán las filas 1 con 3 y luego proceder a la aniquilación.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \\ -5 & 0 & 10 \end{pmatrix} \underset{f_{1,3}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} -5 & 0 & 10 \\ 4 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \underset{f_{21}\left(\frac{4}{5}\right)}{\overset{f_{31}\left(\frac{1}{5}\right)}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} -5 & 0 & 10 \\ 0 & -1 & 10 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

(Paso 2) Ahora $2 = \textit{máx}\{|-1|, |-2|\}$ y ocurre en la fila 3, luego se intercambian las filas 2 y 3 para luego proceder a la aniquilación.

$$\begin{pmatrix} -5 & 0 & 10 \\ 0 & -1 & 10 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \overset{f_{23}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} -5 & 0 & 10 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 10 \end{pmatrix} \overset{f_{32}\left(-\frac{1}{2}\right)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} -5 & 0 & 10 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

así, $A \sim \begin{pmatrix} -5 & 0 & 10 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ con reducción de Gauss con pivote.

Ejercicios

Reducir las siguientes matrices a la forma escalonada (la solución no es única) y escalonada reducida por filas

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Sol. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -3 & -1 \end{pmatrix}$

2) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

Sol. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 5 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

3) $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Sol. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

4) $D = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Sol. $\begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

5) ¿Para qué valores de a y b, las siguientes matrices pueden llevarse a la forma identidad?

a) $A = \begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} 1+a & 0 & -a \\ -a-b & 1 & a+b \\ 1-b-c & 0 & b+c \end{pmatrix}$

2.6 Determinante de una matriz cuadrada

2.6.1 La definición de determinante

Definición 29 **(Permutación)** Sea n un número natural, una permutación del conjunto $\{1,2,\ldots,n\}$, es una reordenación de estos números.

Es un resultado del análisis combinatorio que la cantidad de permutaciones que se tienen en el conjunto $\{1,2,\ldots,n\}$ es $n!$. Aquí $n!$ es el factorial de n, y está definido por:

$$n! = 1\cdot 2\cdot \cdots \cdot (n-1)\,n,$$

así:

$$\begin{aligned} 3! &= 1\cdot 2\cdot 3 \\ 4! &= 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 \end{aligned}$$

por definición $0! = 1$.

Ejemplo 27 Considérese el conjunto $\{1,2\}$. Las permutaciones de este conjunto son:

$$\begin{array}{l} 1,2 \\ 2,1 \end{array}$$

Ejemplo 28 Considere ahora el conjunto $\{1,2,3\}$. Las permutaciones de éste conjunto son:

$$\begin{array}{l} 123 \\ 132 \\ 213 \\ 231 \\ 312 \\ 321 \end{array}$$

Definición 30 **(Inversión)** En una permutación del conjunto $\{1,2,\dots,n\}$ existe una *inversión* cuando un entero precede a otro menor que él. Si el número de inversiones es par, se dice que la permutación es par, si el número de inversiones es impar, se dice que la permutación es impar. El signo de una permutación $j_1 j_2 \dots j_n$ está definido por:

$$sig\,(j_1 j_2 \dots j_n) = \begin{cases} +1, & \text{si el número de inversiones es par} \\ -1, & \text{si el número de inversiones es impar} \end{cases}$$

Ejemplo 29 Considérese las permutaciones de los números 1234

- 1234 es **par**: tiene 0 inversiones.
- 1324 es **impar**: tiene una inversión 3 con 2
- 4213 es **par** pues tiene cuatro inversiones 4 con 2; 4 con 1; 4 con 3; 2 con 1.

Definición 31 **(Determinante)** Sea $A \in M_{n,n}$ la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Sea $j_1 j_2 \dots j_n$ una permutación del conjunto $\{1,2,\dots,n\}$ y considérese el producto

$$a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}$$

de manera que sólo exista un elemento de cada fila y y sólo un elemento de cada columna. El determinante de A, escrito $|A|$ es el número:

$$|A| = \sum sig\,(j_1 j_2 \dots j_n)\, a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}.$$

donde la suma se realiza sobre las $n!$ permutaciones del conjunto $\{1,2,\dots,n\}$. Finalmente diremos que n es el orden de este determinante.

Ejemplo 30 **Determinante de segundo orden**

Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

las permutaciones del conjunto $\{1,2\}$ son

$$12, 21$$

entonces se tienen los siguientes productos

$$\begin{array}{l} a_{11}a_{22} \\ a_{12}a_{21} \end{array}$$

por tanto:

$$\begin{aligned} |A| &= sig(12)\, a_{11}a_{22} + sig(21)\, a_{12}a_{21} \\ &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{aligned}$$

Ejemplo 31 Determinante de tercer orden

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

las permutaciones del conjunto $\{1,2,3\}$ son

$$123, 132, 213, 231, 312, 321$$

entonces se tienen los siguientes productos

$$\begin{array}{l} a_{11}a_{22}a_{33} \\ a_{11}a_{23}a_{32} \\ a_{12}a_{21}a_{33} \\ a_{12}a_{23}a_{31} \\ a_{13}a_{21}a_{32} \\ a_{13}a_{22}a_{31} \end{array}$$

por tanto:

$$\begin{aligned} |A| = & \; sig(123)\, a_{11}a_{22}a_{33} + sig(132)\, a_{11}a_{23}a_{32} + sig(213)\, a_{12}a_{21}a_{33} \\ & \qquad + sig(231)\, a_{12}a_{23}a_{31} + sig(312)\, a_{13}a_{21}a_{32} + sig(321)\, a_{13}a_{22}a_{31} \\ = & \; a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \\ = & \qquad + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{aligned}$$

factorizando a_{11}, a_{12} y a_{13} de cada par de sumandos se tiene:

$$\begin{aligned} |A| = & \; a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\ = & \; a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

así $|A|$ se calcula usando los elementos de la primera fila con los signos que van alternadamente de $+$ a $-$, concretamente:

- **Primer sumando:** a_{11} por el determinante de la matriz que resulta de eliminar la primera fila y primera columna de la matriz A.
- **Segundo sumando:** $-a_{12}$ por el determinante de la matriz que resulta de eliminar la primera fila y segunda columna de la matriz A.
- **Tercer sumando:** a_{13} por el determinante de la matriz que resulta de eliminar la primera fila y tercera columna de la matriz A.

Observación. Reordenando los sumandos es posible obtener otras posibilidades para el cálculo del determinante de una matriz en M_{33} en función de determinantes de orden dos, en efecto: Empleando los elementos de la segunda fila se tiene:

$$|A| = -a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

o empleando los elementos de la tercera fila se tiene:

$$|A| = a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} - a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Ejemplo 32 Empleando la primera fila se tiene:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} &= (1)\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - (2)\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + (3)\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} \\ &= (-3) - 2(-6) + 3(-3) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ejemplo 33 Empleando la primera fila se encuentra:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} &= (2)\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 9 \end{aligned}$$

Maxima El determinante de una matriz es

```
(% i1)  A:matrix([2,-4,6],[5,1,0],[1,2,4])
```

(% o1) $\begin{bmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 5 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

```
(% i2)  determinant(A)

(% o2)  142
```

2.6.2 Propiedades del determinante

Relativo a la transpuesta y al producto

P$_{1A}$) Sea A una matriz cuadrada, entonces

$$|A^t| = |A|$$

Ejemplo 34 Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ x & y \end{pmatrix}$, $A^t = \begin{pmatrix} a & x \\ b & y \end{pmatrix}$, luego:

$$\begin{aligned} |A| &= ay - xb \\ |A^t| &= ay - bx \end{aligned}$$

P$_{1B}$) Sean A, B matrices cuadradas, entonces:

$$|AB| = |A|\,|B|$$

Relativo a la fila o columna nula

P$_2$) Sea A una matriz cuadrada de una fila (o columna nula), entonces

$$|A| = 0$$

Ejemplo 35 Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, el cálculo del determinante da:

$$|A| = (a)(0) - (0)(b) = 0$$

Relativos a las operaciones elementales

Sea A una matriz cuadrada y B la matriz obtenida de A mediante una operación elemental de fila. (las propiedades se mantienen si las operaciones elementales son de columna)

P$_3$) (Operación elemental $f_{i(r)}$) Si $A_{f_{i\,(r)}} \sim B$, $r \neq 0$, entonces

$$|B| = r\,|A|$$

Ejemplo 36 (Operación elemental $f_{i(r)}$) Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, sea B la matriz obtenida de A aplicando la operación elemental $f_{2(r)}$, es decir:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \underset{f_{2(r)}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} a & b \\ cr & dr \end{pmatrix} = B$$

calculando el determinante de B se tiene:

$$\begin{aligned} |B| &= \begin{vmatrix} a & b \\ cr & dr \end{vmatrix} = (a)(dr) - (cr)(b) \\ &= r\,(ad - cb) \\ &= r \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = r\,|A| \end{aligned}$$

por tanto $|B| = r\,|A|$.

P$_4$) (operación elemental f_{ij}) Si $A_{f_{ij}} \sim B$, entonces

$$|B| = -\,|A|.$$

Ejemplo 37 Operación elemental f_{ij}. Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, sea B la matriz obtenida de A aplicando la operación elemental f_{12}, entonces:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \underset{f_{12}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} = B$$

calculando determinantes:

$$\begin{aligned} |A| &= ad - cb \\ |B| &= cb - ad = -\,(ad - cb) \end{aligned}$$

así $|B| = -\,|A|$.

P$_5$) (operación elemental $f_{ij(r)}$) Si $A_{f_{ij\,(r)}} \sim B$, $r \in \mathbf{R}$, entonces

$$|B| = |A|$$

Ejemplo 38 Operación elemental $f_{ij(r)}$. Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, sea B la matriz obtenida de A aplicando la operación elemental $f_{21(r)}$, entonces:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \xrightarrow[F_{21(r)}]{} \begin{pmatrix} a & b \\ c+ra & d+rb \end{pmatrix} = B,$$

calculando los determinantes se tiene:

$$\begin{aligned} |A| &= ad - cd \\ |B| &= a(d+rb) - b(c+ra) \\ &= ad + rab - bc - rab \\ &= ad - cd \end{aligned}$$

luego $|A| = |B|$.

Relativo a filas (columnas) iguales

P$_6$) Sea A una matriz cuadrada tal que dos de sus filas (columnas) son iguales, entonces:

$$|A| = 0$$

Ejemplo 39 Sea

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

0bsérvese que las filas 1 y 3 son iguales, calculando el determinante se encuentra:

$$\begin{aligned} |A| &= a\begin{vmatrix} y & z \\ b & c \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} x & z \\ a & c \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} x & y \\ a & b \end{vmatrix} \\ &= ayc - abz - bxc + baz + cxb - cay \\ &= 0 \end{aligned}$$

Relativo a una columna (fila) que es una suma de vectores

P$_7$) Sea A una matriz cuadrada tal que $A = \left|A^1, A^2, \ldots, A^{i-1}, W^1 + W^2, A^{i+1}, \ldots, A^n\right|$, entonces:

$$|A| = \left|A^1, A^2, \ldots, A^{i-1}, W^1, A^{i+1}, \ldots, A^n\right| + \left|A^1, A^2, \ldots, A^{i-1}, W^2, A^{i+1}, \ldots, A^n\right|$$

donde A_i, $W_1 + W_2$ son las columnas de A.

Ejemplo 40 Sea

$$A = \begin{pmatrix} a & x_1 + x_2 \\ b & y_1 + y_2 \end{pmatrix}$$

Calculando el determinante se encuentra:

$$\begin{aligned} |A| &= a(y_1 + y_2) - b(x_1 + x_2) \\ &= (ay_1 - bx_1) + (ay_2 - bx_2) \\ &= \begin{vmatrix} a & x_1 \\ b & y_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & x_2 \\ b & y_2 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

por tanto:

$$\begin{vmatrix} a & x_1 + x_2 \\ b & y_1 + y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & x_1 \\ b & y_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & x_2 \\ b & y_2 \end{vmatrix}$$

Relativo a matrices triangulares

P$_8$) El determinante de una matriz cuadrada triangular (inferior o superior) es el producto de las entradas de la diagonal principal.

Ejemplo 41

$$\begin{vmatrix} a & * & * \\ 0 & b & * \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = abc$$

Cálculo del determinante empleando operaciones elementales

Empleando operaciones elementales, es posible llevar la matriz a su forma escalonada, cuidando de emplear adecuadamente las propiedades. Recordemos que éstas son:

Operación elemental	Efecto
multiplicación por escalar	determinante original por el escalar
cambio de filas	cambio de signo
tercera operación elemental	ninguno

Ejemplo 42

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 2 & -7 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \\ 3 & -5 & 1 \end{vmatrix} f_{21} &= (-1)\begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -7 & 3 \\ 3 & -5 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} f_{21(2)} \\ f_{31(3)} \end{matrix} \\
&= (-1)\begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -5 \end{vmatrix}_{f_{32}} \\
&= (-1)^2\begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & -3 & -1 \end{vmatrix}_{f_{32(3)}} \\
&= (-1)^2\begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -16 \end{vmatrix} \\
&= (-1)^2(-1)(1)(-16) \\
&= 16
\end{aligned}$$

2.6.3 Menor complementario y cofactor (adjunto) de un elemento

Definición 32 **(Menor complementario)** Sea $A \in M_{n,n}$. Sea $M_{ij} \in M_{n-1,n-1}$ la matriz que resulta de eliminar la fila i y la columna j en la matriz A. El determinante $|M_{ij}|$ se llama menor complementario de A, también se llamará simplemente menor. El número

$$\alpha_{ij} = (-1)^{i+j}|M_{ij}|$$

se llamará cofactor (o adjunto) de la entrada a_{ij}.

Observación. Los signos $(-1)^{i+j}$ de los cofactores de todos los elementos de A siguen la siguiente regla: Los signos se alternan ya sea en filas o columnas. Así para $A \in M_{3,3}$ los signos $(-1)^{i+j}$ son:

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

Ejemplo 43 Considere la matriz

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

entonces:

$$|M_{11}|=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, |M_{12}|=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, |M_{13}|=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

y

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= (-1)^{1+1}|M_{11}|=|M_{11}| \\ \alpha_{12} &= (-1)^{1+2}|M_{12}|=-|M_{12}| \\ \alpha_{13} &= (-1)^{1+3}|M_{13}|=|M_{13}| \end{aligned}$$

Observación. Del ejemplo 31 se tiene

$$\begin{aligned} |A| &= a_{11}|M_{11}|-a_{12}|M_{12}|+a_{13}|M_{13}| \\ &= a_{11}\alpha_{11}+a_{12}\alpha_{12}+\alpha_{13}\alpha_{13} \end{aligned}$$

esto no es casualidad, como se puede apreciar en el siguiente teorema.

Teorema 8 (Desarrollo por cofactores a través de una fila) Sea $A\in M_{n,n}$, entonces

$$|A|=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\alpha_{ik}, \quad i=1,\ldots,n \left\{ \begin{array}{c} \text{Desarrollo por cofactores} \\ \text{por la fila } i \end{array} \right\}$$

Teorema 9 (Desarrollo por cofactores a través de una columna) Sea $A\in M_{n,n}$, entonces

$$|A|=\sum_{k=1}^{n} a_{kj}\alpha_{kj}, \quad j=1,\ldots,n \left\{ \begin{array}{c} \text{Desarrollo por cofactores} \\ \text{por la columna } j \end{array} \right\}$$

Ejemplo 44

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

los signos de los cofactores son

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

A continuación realizamos el cálculo del determinante de tres maneras.

- (Cofactores a través de la primera fila) Los signos serán $+,-,+$.

$$|A|=+2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}-(0)\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix}+(3)\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}=4$$

- (Cofactores a través de la segunda fila) Los signos son $-,+,-$

$$|A|=-(-1)\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}+(1)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix}-(1)\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}=4$$

- (Cofactores a través de la primera columna) Los signos son $+,-,+$

$$|A|=(2)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}-(-1)\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}+(-3)\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=4$$

2.6.4 Menor y menor principal

Definición 33 **(Menor)** Un menor de una matriz A es el determinante de la submatriz obtenida de A tomando algunas filas y algunas columnas. El orden del menor principal es el número de filas (columnas).

Ejemplo 45 Sea $A = (a_{ij}) \in M_{5,5}$. Tomando las filas $3,4,5$ y las columnas $1,2,5$ se tiene el menor de orden 3:

$$\left.\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{55} \end{vmatrix} \begin{array}{l} \longleftarrow \text{ fila 3 con las columnas } 1,2,5 \\ \longleftarrow \text{ fila 4 con las columnas } 1,2,5 \\ \longleftarrow \text{ fila 5 con las columnas } 1,2,5 \end{array}\right\}$$

Ejemplo 46 Considérese

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$$

tomando las filas $2,4$ y las columnas $3,4$ se tiene el menor de orden 2:

$$\begin{vmatrix} 7 & 8 \\ 15 & 16 \end{vmatrix}$$

Definición 34 **(Menor principal)** Si los elementos de la diagonal principal del menor son también elementos de la diagonal principal de A, el menor se llama **menor principal**.

Ejemplo 47 Un menor principal de la matriz del ejemplo anterior se encuentra con las filas $1,3$ y las columnas $1,3$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 9 & 11 \end{vmatrix}$$

2.6.5 Rango de una matriz

La definición de rango

Definición 35 El rango de una matriz cuadrada no nula A es igual a r, lo que escribiremos $rango\,(A) = r$ o $rg(A) = r$, si al menos uno de los menores cuadrados de orden r es distinto de cero, siendo nulos los menores cuadrados de orden $r+1$. Por definición el rango de la matriz nula es 0.

Ejemplo 48 Considere

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

el determinante $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2$, y $|A| = 0$, entonces $rango\,(A) = 2$.

Teorema 10 El rango de A es igual al rango de su transpuesta, es decir:

$$rango\,(A) = rango\,(A^t)$$

Teoremas y un algoritmo relativo al cálculo del rango

Teorema 11 El rango de una matriz no varia mediante operaciones elementales de fila o columna.

Teorema 12 El rango de una matriz que está en la forma escalonada es el número de filas no nulas.

Los dos teoremas previos nos dan un algoritmo para calcular el rango de una matriz, pues si se está interesado en calcular el rango de una matriz A, entonces se deben seguir con los siguientes pasos:

1) Realizar operaciones elementales de fila de modo de obtener la forma escalonada de la matriz,
2) Se cuentan el número de filas no nulas; si este número es r, entonces:

$$rango\,(A) = r.$$

Ejemplo 49 Se calculará el rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 2 \\ -3 & 6 & 10 & 8 \\ -2 & 4 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

Solución.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 2 \\ -3 & 6 & 10 & 8 \\ -2 & 4 & 7 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[f_{21(-3)}]{f_{31(-2)}} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[f_{32(-1)}]{} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

la última matriz está en la forma escalonada, y sus dos primeras filas no son nulas, entonces $rango\,(A) = 2$.

Ejemplo 50 Ahora considérese la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[f_{21(1)}]{F_{31(-1)}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[f_{32(-2)}]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

la última matriz está en su forma escalonada, no tiene ninguna fila nula, es decir $rango\,(B) = 3$.

Maxima El Rango de una matrices es

```
(% i1)  A:matrix([2,-4,6],[5,1,0],[7,-3,6])
```

(% o1) $\begin{bmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 5 & 1 & 0 \\ 7 & -3 & 6 \end{bmatrix}$

```
(% i2)  rank(A)

(% o2)  2
```

Ejercicios propuestos

1) Determinar si las siguientes permutaciones son pares o impares encontrando el número de inversiones.
   a) 3214. Sol. impar
   b) 4213. Sol. par
   c) 32154. Sol. par

d) 13524. Sol. impar
e) 42531. Sol. impar

2) Aplicando propiedades mostrar que

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

3) Sin hacer el desarrollo por cofactores calcular:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}$$

Sol. 0.

4) Sin hacer el desarrollo del determinante pruébese que:

$$\begin{vmatrix} -b^2+a^2 & 1 & a^2 \\ b^2-c^2 & 1 & b^2 \\ -a^2+c^2 & 1 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2 & 1 & b^2 \\ b^2 & 1 & c^2 \\ c^2 & 1 & a^2 \end{vmatrix}$$

5) Usando propiedades mostrar que:

a) $\begin{vmatrix} a_1^2 & a_1 & 1 \\ a_2^2 & a_2 & 1 \\ a_3^2 & a_3 & 1 \end{vmatrix} = -(a_1-a_2)(a_2-a_3)(a_3-a_1)$

b) $\begin{vmatrix} a & 1 & a^3 \\ b & 1 & b^3 \\ c & 1 & c^3 \end{vmatrix} = (b-c)(a-c)(a-b)(a+b+c)$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \\ 3 & x+2 & 2x+1 & 3x \\ 3 & 2x+1 & x^2+2 & 3x^2 \end{vmatrix} = \left(x^2-4x-3\right)(x-1)^4$

d) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ yz & xz & xy \end{vmatrix} = (x-y)(y-z)(z-x)$

e) $\begin{vmatrix} y+z & x+z & x+y \\ x & y & z \\ x+y+z & x+y+z & x+y+z \end{vmatrix} = 0$

f) $\begin{vmatrix} x+y & x & y \\ y & x+y & x \\ x & y & x+y \end{vmatrix} = 2(x+y)\left(x^2-xy+y^2\right)$

g) $\begin{vmatrix} 1+a & a & a & a \\ a & 1-a & a & a \\ a & a & 1+a & a \\ a & a & a & 1-a \end{vmatrix} = 1-8a^2+8a^3$

h) $\begin{vmatrix} x+a & x & x & x \\ x & x-a & x & x \\ x & x & x+b & x \\ x & x & x & x-b \end{vmatrix} = a^2b^2$

i) $\begin{vmatrix} a^2-r & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2-r & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2-r & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2-r \end{vmatrix} = \left((a+b)^2-r\right)\left((a-b)^2-r\right)\left(a^2-b^2-r\right)^2$ (Sug. Podría sumar las últimas tres columnas a la primera y factorizar $(a+b)^2-r$)

6) Conjeturar una fórmula para el determinante de $\begin{vmatrix} x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & x & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & x \end{vmatrix}$ (Es una matriz con unos en cada entrada fuera de la diagonal y x en la diagonal). Sol. $(x-1)^{n-1}(x+n-1)$.
7) Se dice que una matriz es ortogonal si $A^tA = I$. Probar que si A es ortogonal $|A| = \pm 1$.
8) Sea $A \in M_{n,n}$, probar que $|kA| = k^n |A|$.
9) Una matriz A es antisimétrica si $A^t = -A$. Si A es antisimétrica, ¿es cierto que el determinante de A es cero?
10) Hallar todas las matrices en $M_{2,2}$ A y B tales que $|A|+|B| = |A+B|$. Sol. Si $A = [A_1\ A_2]$ y $B = [B_1\ B_2]$, esta matrices deben verificar: $|A_1\ B_2| + |B_1\ A_2| = 0$, por ejemplo ($A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$)
11) Determinar el rango de las siguientes matrices.
    a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$. Sol. rango$(A) = 2$.
    b) $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Sol. rango$(B) = 3$.
12) Calcular del determinante de $A = \begin{pmatrix} 0 & c & b \\ c & 0 & a \\ b & a & 0 \end{pmatrix}$. Sol. $2abc$
13) Determinar los valores de k de modo que las siguientes matrices tengan rango igual al orden de la matriz.
    a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & k & k \\ -2 & -k & 1 \end{pmatrix}$. Sol. $k \neq -1$ y $k \neq 0$.
    b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1+k & -2 \\ 1 & 1+2k & k-5 \end{pmatrix}$. Sol. $k \neq 4$, $k \neq 0$.
    c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & k \end{pmatrix}$ Sol. $k \neq -2$
    d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & -2-2k+k^2 \end{pmatrix}$ Sol. $k \neq 2$, $k \neq 0$
    e) $\begin{pmatrix} -6 & 12+7a & 6-19a+5b \\ -3 & 6+3a & 3-8a+2b \\ -1 & 2+a & 1-3a+b \end{pmatrix}$ Sol. $a \neq b$, $a \neq 0$
14) Determinar los valores de k de modo que las siguientes matrices tengan rango igual a 2.
    a) $\begin{pmatrix} 6 & 18 & -2k \\ 7 & -2 & -4 \\ 4 & 10 & 6 \end{pmatrix}$. Sol. $k = -\frac{73}{13}$
    b) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & k & 0 & -1 \\ 1 & 0 & k & 1 \end{pmatrix}$ Sol. no existe

2.7 ¿Sabias que?

(Tomado de http://www.enterate.unam.mx/Articulos/2003/mayo/progext.htm) ¿qué tan grave puede ser que se suscite un error?

En el periodo de 1985 a 1987, seis personas fueron sobreexpuestas a radiación por un tratamiento contra el cáncer que era proporcionado con ayuda de una máquina llamada Therac-25. Se cree que tres de estos seis pacientes fallecieron debido a la sobreexposición, causada por un error en el software de la máquina Therac-25 y por la falta de monitoreo de los operadores de la máquina.

En 1995, el procesador Pentium de Intel registered presentó un error de software, codificado en su hardware, que llevaba a la imprecisión en las operaciones de división de números con punto flotante. Intel predecía que este problema sólo lo notaría una persona cada 27 mil años, no obstante, fue tan conocido, que la empresa perdió más de 400 millones de dólares en reemplazos del procesador.

El 4 de junio de 1996, la nave espacial Ariane 5, a los 40 segundos de haber iniciado su secuencia de vuelo y a una altitud de 3,700 metros, se salió de su ruta y explotó. El problema fue ocasionado por el software de navegación que heredó del Ariane 4 y que no fue debidamente probado.

Durante la Guerra del Golfo, un misil americano Patriot, falló en rastrear e interceptar un misil Scud iraquí, el cual mató a 28 soldados e hirió a 100 personas. El problema se produjo por un error en los cálculos del Sistema de Control de Armas; cuando ocurrió el incidente, el sistema había trabajado por más de 100 horas, para entonces, la imprecisión del software se acumuló y ocasionó que el sistema buscara en el lugar equivocado el misil Scud.

3 — Sistemas de ecuaciones lineales

En este capítulo se define un sistema de ecuaciones lineales, se estudia un teorema relativo al rango y las soluciones, se entudia también una técnica simple para determinar todas las soluciones de un sistema. En una segunda parte se estudia la posibilidad de invertir una matriz cuadrada y las condiciones bajo las cuales esto es posible. Finalmente se estudia la regla de Cramer para resolver sistemas cuadrados.

3.1 Introducción

3.1.1 La definición de sistema lineal

Un sistema lineal de m ecuaciones con n incógnitas tiene la forma:

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}$$

los números a_{ij} son los coeficientes del sistema, los b_i se llaman términos independientes y los x_i se llaman incógnitas del sistema. Si cada b_i es cero, el sistema se llama **sistema homogéneo**.

3.1.2 Notación matricial

El anterior sistema puede escribirse como $Ax = b$, donde $A \in M_{m,n}$ es la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$b \in M_{m,1}$, $x \in M_{n,1}$ son los vectores:

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \; x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

3.1.3 La solución de un sistema lineal

Un vector x es solución de un sistema lineal $Ax = b$, si satisface la ecuación matricial, esto a su vez significa que el vector x satisface cada una de las ecuaciones del sistema.

Ejemplo 51 El siguiente sistema, es de 2 ecuaciones con 3 incógnitas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

una solución de este sistema es el vector:

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

pues

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Maxima Resolver un sistema de ecuaciones

```
(% i1)  linsolve([x+2*y+3*z=5, -2*x+2*y+2*z=-2], [x,y,z])
```

(% o1) $[x = -\frac{(\%r1-7)}{3}, y = -\frac{(4*\%r1-4)}{3}, z = \%r1]$

donde $\%r1 \in \mathbb{R}$

3.2 Teorema de existencia de soluciones

Definición 36 **(Matriz ampliada)** Considere el sistema lineal $Ax = b$, $A \in M_{m,n}$. La matriz obtenida de añadir a la matriz A la columna b, denotada por $[A : b] \in M_{m,n+1}$ o $[A|b]$, se llama matriz ampliada (o matriz aumentada).

Las soluciones de un sistema $Ax = b$, $A \in M_{m,n}$ están completamente determinadas por el rango de A y el rango de la matriz ampliada $[A : b]$, eso es lo que afirma el siguiente teorema.

Maxima La matriz ampliada de un sistema de ecuaciones se obtiene

(% i1) augcoefmatrix($[eq_1, \cdots, , eq_m]$, $[x_1, \cdots, x_n]$)
Lo que nos entrega la matriz ampliada del coeficientes para las variables $x_1, \cdots, x_n$ del sistema de ecuaciones lineales $eq_1, \cdots, , eq_m$

Ejemplo

```
(% i1)  augcoefmatrix([x+2*y+3*z=5, -2*x+2*y+2*z=-2], [x,y,z])
```

(% o1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ -2 & 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$

Teorema 13 Sea $Ax = b$, un sistema de m ecuaciones y n incógnitas, entonces:

1) El sistema no tiene solución ssi

$$rango\,(A) \neq rango\,([A : b])\,.$$

2) El sistema tiene infinitas soluciones ssi

$$rango\,(A) = rango\,([A : b]) < n.$$

3) El sistema tiene solución única ssi

$$rango\,(A) = rango\,([A : b]) = n.$$

En los tres siguientes ejemplos determinaremos si los sistemas tienen o no soluciones.

Ejemplo 52

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Via operaciones elementales calcularemos el rango de la matriz ampliada $[A : b]$:

$$[A : b] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & : & 3 \\ 3 & 5 & 1 & : & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[f_{21(-3)}]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & : & 3 \\ 0 & -1 & -2 & : & -10 \end{pmatrix}$$

es claro que $rango\,(A) = rango\,([A : b]) = 2 < 3$, luego el sistema tiene infinitas soluciones (**Teorema** 13).

Ejemplo 53

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 1 \\ -4 & 7 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Mediante operaciones elementales calcularemos el rango de la matriz ampliada $[A : b]$:

$$[A : b] = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & : & 2 \\ 3 & -5 & 1 & : & -1 \\ -4 & 7 & 0 & : & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[f_{21(3)}]{f_{31(-4)}} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & : & 2 \\ 0 & 1 & 4 & : & 5 \\ 0 & -1 & -4 & : & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[f_{32(1)}]{} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & : & 2 \\ 0 & 1 & 4 & : & 5 \\ 0 & 0 & 0 & : & 2 \end{pmatrix}$$

luego $rango\,(A) = 2$, $rango\,([A : b]) = 3$, por tanto el sistema **no tiene** soluciones (**Teorema** 13).

Ejemplo 54

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 1 \\ -4 & 7 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -14 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$[A : b] = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & : & 1 \\ 3 & -5 & 1 & : & -14 \\ -4 & 7 & 5 & : & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[f_{21(3)}]{f_{31(-4)}} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & : & 2 \\ 0 & 1 & 4 & : & -11 \\ 0 & -1 & 1 & : & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[f_{32(1)}]{} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & : & 2 \\ 0 & 1 & 4 & : & -11 \\ 0 & 0 & 5 & : & -15 \end{pmatrix}$$

luego $rango\,(A) = rango\,([A : b]) = 3$, es decir, el sistema **tiene** solución única (**Teorema** 13).

3.3 Soluciones de un sistema triangular

3.3.1 Sistema triangular superior

Un sistema $Ax = b$, con $A \in M_{n,n}$, es triangular superior si la matriz A es triangular superior. Si $rango\,(A) = n$, el sistema se resuelve con el algoritmo de sustitución inversa.

Ejemplo 55 Considere el sistema triangular

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Si $rango\,(A) = 3$, entonces ninguno de los elementos de la diagonal principal pueden ser nulos. La solución se encuentra sucesivamente en los siguientes pasos:

- x_3 se encuentra de la ecuación $a_{33}x_3 = b_3$, de donde

$$x_3 = \frac{b_3}{a_{33}}$$

- x_2 se encuentra de la ecuación $a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$, de donde

$$x_2 = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{23}x_3)$$

- x_1 se encuentra de la ecuación $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$, de donde

$$x_1 = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3)$$

Teorema 14 Sea $Ax = b$, es un sistema triangular $A \in M_{n,n}$ de rango n, entonces las soluciones son:

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{b_n}{a_{nn}} \\ x_j &= \frac{1}{a_{jj}}\left(b_j - \sum_{k=j+1}^{n} a_{jk}x_k\right), \; j = n-1, n-2, \ldots, 1 \end{aligned}$$

este algoritmo se llama **de sustitución inversa**.

3.3.2 Sistema triangular inferior

Un sistema $Ax = b$, con $A \in M_{n,n}$, es triangular inferior si la matriz A es triangular inferior. Si *rango* $(A) = n$, el sistema se resuelve con el algoritmo de sustitución directa.

Ejemplo 56 Considere el sistema triangular inferior

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Si *rango* $(A) = 3$, entonces ninguno de los elementos de la diagonal principal pueden ser nulos. La solución se encuentra sucesivamente con los siguientes pasos:

- x_1 se encuentra de la ecuación $a_{11}x_1 = b_1$, de donde

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{11}}$$

- x_2 se encuentra de la ecuación $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$, de donde

$$x_2 = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1)$$

- x_3 se encuentra de la ecuación $a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$, de donde

$$x_3 = \frac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2)$$

Teorema 15 Sea $Ax = b$, un sistema triangular inferior con $A \in M_{n,n}$ de rango n, entonces las soluciones del sistema son:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{b_1}{a_{11}} \\ x_j &= \frac{1}{a_{jj}}\left(b_j - \sum_{k=1}^{j-1} a_{jk}x_k\right), \; j = 2, \ldots, n \end{aligned}$$

este algoritmo se llama **de sustitución directa**.

3.4 Sobre las soluciones del sistema $Ax = b$

3.4.1 Sistemas equivalentes

Definición 37 **(Sistemas equivalentes)** Sea $Ax = b$, un sistema con $A \in M_{m,n}$ y $[A : b]$ su matriz aumentada. Sea $[A' : b']$ una matriz equivalente a la matriz $[A : b]$, entonces los sistemas $Ax = b$ y $A'x = b'$ se llaman equivalentes.

Las operaciones elementales no modifican la solución de un sistema lineal, como se afirma en el siguiente teorema.

Teorema 16 Las soluciones de dos sistemas equivalentes son iguales.

3.4.2 Variables libres

Definición 38 **(Variable libre)** Sea $Ax = b$, un sistema lineal con $A \in M_{m,n}$ tal que $[A : b]$ se encuentra en su forma escalonada, sea j la columna en donde no existe un elemento distinguido, en ese caso la variable x_j se llamará variable libre.

Ejemplo 57 Considere el sistema

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

la matriz aumentada es:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{2} & 1 & 3 & 1 & : & 4 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 3 & : & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{2} & : & 2 \end{pmatrix}$$

los elementos distinguidos se encuentran en las columnas $1, 3, 4$, por tanto la única variable libre es x_2.

Teorema 17 Si $[A : b]$ se encuentra en la forma escalonada y $rango\,(A) = rango\,(A : b)$, y se tiene al menos una variable libre, entonces se tienen infinitas soluciones.

3.4.3 Cálculo de la solución de un sistema $Ax = b$

Los resultados previos justifican el siguiente proceso para resolver un sistema lineal $Ax = b$, donde $A \in M_{m,n}$.

Paso 1 ▷ Construir la matriz aumentada $[A : b]$.
Paso 2 ▷ Llevar $[A : B]$ a la forma escalonada $[A' : b']$.
Paso 3 ▷ Identificar las variables libres.
Paso 4 ▷ Asignar valores arbitrarios a las variables libres o parámetros. Este hecho origina un sistema cuadrado triangular superior.
Paso 5 ▷ Se resuelve el sistema triangular superior, encontrándose así las incógnitas faltantes.
Paso 6 ▷ Se escribe la solución.

Ejemplo 58

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$[A : b] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & : & 3 \\ 3 & 5 & 1 & : & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[f_{21(-3)}]{} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & 1 & : & 3 \\ 0 & \mathbf{-1} & -2 & : & -10 \end{pmatrix}$$

Claramente el sistema tiene infinitas soluciones y la variable libre es x_3. Sea $x_3 = t$, $t \in \mathbb{R}$, así el sistema se transforma en:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-t \\ -10+2t \end{pmatrix}$$

que como se esperaba es triangular superior, resolviendo por sustitución inversa se tiene sucesivamente:

$$\begin{aligned} x_2 &= 10-2t \\ x_1 &= 3-t-2(x_2) \\ &= 3-t-2(10-2t) \\ &= -17+3t \end{aligned}$$

por tanto la solución del sistema es:

$$x = \begin{pmatrix} -17+3t \\ 10-2t \\ t \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{R}$$

el sistema tiene infinitas soluciones (para cada valor de t se tiene una solución).

Ejemplo 59 Resolver

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Solución.

$$[A:b] = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & : & 2 \\ 2 & -1 & 0 & : & 1 \\ -1 & 0 & 3 & : & 1 \\ 1 & -1 & 3 & : & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[f_{21(2)}]{f_{31(-1)}f_{41(1)}} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & : & 2 \\ 0 & 3 & 6 & : & 5 \\ 0 & -2 & 0 & : & -1 \\ 0 & 1 & 6 & : & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[f_{24}]{}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & : & 2 \\ 0 & 1 & 6 & : & 4 \\ 0 & -2 & 0 & : & -1 \\ 0 & 3 & 6 & : & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[f_{32(2)}]{f_{42(-3)}} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & : & 2 \\ 0 & 1 & 6 & : & 4 \\ 0 & 0 & 12 & : & 7 \\ 0 & 0 & -12 & : & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow[f_{43(1)}]{} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & : & 2 \\ 0 & 1 & 6 & : & 4 \\ 0 & 0 & 12 & : & 7 \\ 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{pmatrix}$$

Puede observarse que el sistema no tiene variables libres. Por otra parte el sistema tiene solución única pues $rango(A) = rango[A:b] = 3 =$ número de variables. Empleando sustitución inversa se tiene:

$$\begin{aligned} x_3 &= 7/12 \\ x_2 &= 1/2 \\ x_1 &= 3/4 \end{aligned}$$

Por tanto la solución del sistema es:

$$x = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{7}{12} \end{pmatrix}$$

Ejemplo 60 Resolver

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 29 \\ 28 \end{pmatrix}$$

Solución.

$$[A:b] = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & : & 6 \\ 3 & -3 & 4 & 5 & . & 29 \\ 1 & -1 & 3 & 5 & : & 28 \end{pmatrix} \xrightarrow[f_{21(-3)}]{f_{31(-1)}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & : & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & . & 11 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & : & 22 \end{pmatrix} \xrightarrow[f_{32(-2)}]{} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & -1 & 1 & 1 & : & 6 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 2 & . & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{pmatrix}$$

las variables libres son: x_2 y x_4. Sean

$$\begin{aligned} x_2 &= t \\ x_4 &= s \end{aligned}$$

entonces, el sistema se convierte en:

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 6 + x_2 - x_4 \\ x_3 &= 11 - 2x_4 \end{aligned}$$

Reemplazando $x_2 = t$ y $x_4 = s$, se tiene el sistema triangular

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 6 + t - s \\ x_3 &= 11 - 2s \end{aligned}$$

de donde sucesivamente:

$$\begin{aligned} x_3 &= 11 - 2s \\ x_1 &= 6 + t - s - (11 - 2s) \\ &= -5 + t + s \end{aligned}$$

Por tanto la solución del sistema es:

$$x = \begin{pmatrix} -5 + t + s \\ t \\ 11 - 2s \\ s \end{pmatrix}, \ t, s \in \mathbb{R}$$

Nótese que la solución puede escribirse como:

$$x = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ t, s \in \mathbb{R}$$

Esto quiere decir que para cada valor de t y para cada valor de s, obtenemos una solución. Por ejemplo, si $t = s = 0$, una solución es $\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix}$. Si $s = 1, t = 2$, otra solución sería $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}$

Por otro lado, el conjunto solución del sistema está dado por:

$$S=\left\{\begin{pmatrix}-5+t+s\\ t\\ 11-2s\\ s\end{pmatrix},\ t,s\in\mathbb{R}\right\}$$

Ejemplo 61 Considere el siguiente sistema:

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & k & 2\\ 0 & 0 & k-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 1\\ k-1\end{pmatrix}$$

determinaremos los valores de k para que el sistema (a) tenga solución única, (b) tenga infinitas soluciones, (c) no tenga soluciones.

Solución. (a) El rango de la matriz de coeficientes debe ser igual al rango de la matriz ampliada e igual a 3, esto solo puede darse si $k\neq 2$ y $k\neq 0$.

(b) $rango\,(A)=2$ para $k=0$ o $k=2$. Para $k=2$, $rango\,[A:b]$=3, por tanto para este valor no se pueden tener infinitas soluciones (en realidad no se tienen soluciones), para $k=0$, $rango\,[A:b]=2$, por tanto, para $k=0$ se tienen infinitas soluciones.

(c) Por lo anterior el sistema no tiene soluciones para $k=2$.

Maxima Para resolver este tipo de problemas con par
`triangularize(A)`

Ejercicios propuestos

1) Determinar las condiciones que deben cumplir los a's de modo los siguientes sistemas tengan solución

$$\begin{array}{r}x-2y=a_1\\ 2x+y=a_2\\ 4x+3y=a_3\end{array}\qquad\qquad \begin{array}{r}-x-2y+z=a_1\\ -3x+2y=a_2\\ 4x-2y+z=a_3\end{array}$$

2) Hallar los valores de k de modo que los siguientes sistemas (a) tengan solución única, (b) tengan infinitas soluciones, (c) no tengan soluciones

a) $$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & k & k\\ -2 & -k & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 4\\ -5+k^2\end{pmatrix}$$

Sol. (a) $k\neq -1$ y $k\neq 0$, (b) $k=-1$, (c) $k=0$.

b) $$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & -1+k & -2\\ 1 & 1+2k & k-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 5+k\end{pmatrix}$$

Sol. (a) $k\neq 0$, $k\neq 4$, (b) $k=0$, (c) $k=4$.

c) $$\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 3 & 0\\ 2 & 2 & k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 4+k\end{pmatrix}$$

Sol. (a) $k\neq -2$, (b) no, (c) $k=-2$

d) $$\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 3 & 0\\ 2 & 2 & -2-2k+k^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 3\\ k+2\end{pmatrix}$$

Sol. (a) $k\neq 2, k\neq 0$,(b) $k=2$,(c) $k=0$

e) $$\begin{pmatrix}k & 1 & 1\\ 1 & k/4 & 1\\ k & 1 & k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k\\ 2k\\ k\end{pmatrix}$$

Sol. (a) $k \in \mathbb{R}-\{1,\pm 2\}$, (b) Infinitas soluciones $k = 1$, (c) $k = \pm 2$

f) $\begin{pmatrix} k & 4 & 4 \\ 1 & k & 1 \\ 4 & 1 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ 2k \\ 4 \end{pmatrix}$

Sol. (a) $k \in \mathbb{R}-\{-5,1,4\}$, (b) No existe el caso de infinitas soluciones, (c) $k \in \{-5,1,4\}$.

3) Analizar las soluciones del sistema tomando en cuenta el valor de α y β.

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta/2 \\ \alpha & 2\alpha & \beta \\ \beta & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha-\beta \\ \beta \\ \alpha \end{pmatrix}$$

Sol.
a) Infinitas soluciones para $\alpha = 2$, $\beta = 4/3$ y $\alpha = 0$, $\beta = 0$.
b) Sin solución para $\alpha = 2$, $\beta \neq 4/3$ y $\alpha = 0$, $\beta \in \mathbb{R}-\{0\}$
c) Solución única para $\alpha \neq 2$ y $\alpha \neq 0$

4) Dados $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$, $u_3 = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ determinar que condición ha de cumplir a para que $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ pueda escribirse como $v = xu_1 + yu_2 + zu_3$.

Sol. $a \in \mathbb{R}-\{-1,3/2\}$.

5) Resolver:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & -1 & -5 & -1 \\ 2 & -2 & 3 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 10 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Sol. $\left\{ \begin{pmatrix} -8+t-3s \\ t \\ 6 \\ 2+s \\ s \end{pmatrix} / t,s \in \mathbb{R} \right\}$

6) Resolver:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Sol. $\left\{ \begin{pmatrix} 2-2t_1-t_2 \\ t_1 \\ -1-2t_2 \\ t_2 \\ 2 \end{pmatrix} / t_1,t_2 \in \mathbb{R} \right\}$

7) Resolver:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 6 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Sol. : } \left\{ \begin{pmatrix} 1-2t_1-t_2 \\ t_1 \\ -2-2t_2 \\ t_2 \\ 4 \end{pmatrix} / t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

8) Resolver:

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Sol. No existen.

9) Resolver:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Sol. : } \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1-t_1 \\ t_1 \end{pmatrix} / t_1 \right\}$$

10) Determine un polinomio de grado 2 que pase por los puntos:

$$(-2,-17), (-1,-7), (3,-7)$$

3.5 La inversa de una matriz

3.5.1 La definición de matriz inversa

Definición 39 **(Inversa)** Sea $A \in M_{n,n}$. Diremos que una matriz $B \in M_{n,n}$ es la inversa de A si

$$\begin{aligned} AB &= I_n \\ BA &= I_n \end{aligned}$$

donde I_n es la matriz identidad, en $M_{n,n}$.

Notación. Es costumbre denotar la inversa de una matriz A mediante A^{-1}, por tanto si A^{-1} es la inversa de A se debe tener: $A^{-1}A = I_n$, $AA^{-1} = I_n$, si no se dice lo contrario ésta será la notación usual para la inversa.

Ejemplo 62 (No pregunten de donde se saca la inversa de la siguiente matriz, más adelante se aprenderá a calcularlo). La inversa de

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

es :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

pues:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.5.2 Cálculo de la inversa

Para el cálculo de la inversa de una matriz, recordemos algunos resultados de productos de matrices.

Inicio del repaso

- Si $A, B \in M_{n,n}$ y si $B = \left[B^1, B^2, \ldots, B^n\right]$ donde los B^j son la columnas de B, entonces:
$$\begin{aligned} AB &= A\left[B^1, B^2, \ldots, B^n\right] \\ &= \left[AB^1, AB^2, \ldots, AB^n\right] \end{aligned}$$
esto muestra que la $j-ésima$ columna de AB es el producto AB^j, siendo B^j la $j-ésima$ columna de B.
- La solución del sistema $Ix = b$, es $x = b$. (aquí I es la matriz identidad)

Fin de repaso

Ahora estamos listos para discutir la forma de calcular la inversa. Sea $A \in M_{n,n}$ una matriz de rango igual a n, para el cálculo de la inversa emplearemos la siguiente notación:

- $A^{-1} = \left[X^1, X^2, \ldots, X^n\right]$, donde X_j es la $j-ésima$ será la inversa de A
- $I = [e_1, e_2, \ldots, e_n]$, I es la matriz identidad y e_j la $j-ésima$ columna.

Puesto que A^{-1} es la inversa de A debemos tener $AA^{-1} = I$, entonces:

$$\left[AX^1, AX^2, \ldots, AX^n\right] = [e_1, e_2, \ldots . e_n]$$

de donde

$$AX^j = e_j, \ j = 1, 2, \ldots, n$$

lo anterior muestra que la $j-ésima$ columna de X se encuentra resolviendo el sistema $AX^j = e_j$.

Puesto que en cada uno de estos sistemas la matriz A no varia, podemos considerar la matriz aumentada que involucre todos los sistemas, esta matriz es:

$$[A : e_1, e_2, \ldots, e_n]$$

resolviendo estos sistemas encontramos las columnas de la matriz inversa X, más aún podemos llevar la anterior matriz a la forma escalonada reducida por filas, y puesto que A es de rango n, la matriz escalonada reducida por filas debe ser la matriz identidad, así la matriz aumentada tiene la forma:

$$\left[e_1, e_2, \ldots, e_n : X^1, X^2, \ldots, X^n\right]$$

así se ha calculado la inversa, $A^{-1} = \left[X^1, X^2, \ldots, X^n\right]$. A continuación el algoritmo para el cálculo de la inversa.

Algoritmo para el cálculo de la inversa

Para calcular la inversa de una matriz $A \in M_{n,n}$ de rango n, se siguen los siguientes pasos

1 ▶ Se construye $[A : e_1, e_2, \ldots, e_n]$

2 ▶ Se realizan operaciones elementales de modo que

$$[A : e_1, e_2, \ldots, e_n] \sim \cdots \sim \left[e_1, e_2, \ldots, e_n : X^1, X^2, \ldots, X^n\right]$$

3 ► La matriz inversa A^{-1} tiene por columnas a los vectores $X^1, X^2, \ldots, X^n$.

Ejemplo 63 Calcularemos la inversa de

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Solución.

$$\left(\begin{array}{cccccc} 2 & 7 & : & 1 & 0 \\ 1 & 4 & : & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[f_{21}\left(-\frac{1}{2}\right)]{} \left(\begin{array}{cccccc} 2 & 7 & : & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & : & -1/2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[f_{2(2)}]{} \left(\begin{array}{cccccc} 2 & 7 & : & 1 & 0 \\ 0 & 1 & : & -1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[f_{12(-7)}]{}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc} 2 & 0 & : & 8 & -14 \\ 0 & 1 & : & -1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[f_{1(1/2)}]{} \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & : & 4 & -7 \\ 0 & 1 & : & -1 & 2 \end{array}\right)$$

por tanto:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 64 Determinar la inversa de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución.

$$[A:I] = \left(\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 1 & : & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & : & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & : & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[f_{21(-2)}]{f_{31(-1)}} \left(\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 1 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & : & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & : & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[f_{32}\left(-\frac{2}{3}\right)]{}$$

$$\left(\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 1 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & : & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & : & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[f_{2(-1/3)}]{f_{3(1/2)}} \left(\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 1 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & : & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & : & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow[f_{23(-1)}]{f_{13(-1)}}$$

$$\left(\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 0 & : & \frac{5}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & : & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & : & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow[f_{12(-2)}]{} \left(\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & 0 & : & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & : & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & : & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

de lo anterior se deduce que $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Maxima La inversa de la matriz A se obtiene

```
(% i1)  A:matrix([2,3,6],[5,1,0],[2,1,2])
```

(% o1) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 5 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

```
(% i2)  invert(A)
```

(% o2) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\ \frac{5}{4} & 1 & -\frac{15}{4} \\ -\frac{3}{8} & -\frac{1}{2} & \frac{13}{4} \end{bmatrix}$

3.5.3 Algunos teoremas sobre la inversa

Teorema 18 Sobre una matriz $A \in M_{n,n}$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1) A tiene inversa.
2) $rango(A) = n$.
3) $|A| = \det(A) \neq 0$.

Teorema 19 Si $A, B \in M_{n,n}$ son invertibles, entonces AB es invertible, más aún, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Demostración. Aceptando que AB es invertible, entonces

$$(AB)(AB)^{-1} = I$$

premultiplicando por la izquierda por A^{-1} se tiene:

$$B(AB)^{-1} = A^{-1}$$

premultiplicando una vez más por B^{-1} :

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

■

Teorema 20 **(Unicidad de la inversa)** Si la inversa existe, ésta es única.

Demostración. Sea A una matriz invertible con inversa B. Si C es otra inversa se debe tener:

$$\begin{aligned} AB &= I,\ BA = I \\ AC &= I,\ CA = I \end{aligned}$$

entonces:

$$\begin{aligned} B &= BI \\ &= B(AC) \\ &= (BA)C \\ &= IC \\ &= C \end{aligned}$$

eso prueba el teorema. ■

3.5.4 La adjunta de una matriz en el cálculo de la inversa

En el capítulo 1, definimos el número

$$\alpha_{ij} = (-1)^{i+j}\left|M_{ij}\right|$$

como cofactor (o adjunto) de la entrada a_{ij} de una matriz $A = (a_{i,j}) \in M_{n,n}$, donde M_{ij} es la submatriz de A obtenida eliminando la fila i y la columna j. La matriz construida con estos cofactores, será llamada matriz adjunta.

Definición 40 **(Matriz adjunta)** Sea $A \in M_{n,n}$, la matriz $adjunta$ de A es la matriz, denotada por $adj(A)$, cuyo elemento ji es $\alpha_{ij} = (-1)^{i+j}\left|M_{ij}\right|$, es decir, es la transpuesta de la matriz formada por los cofactores.

$$adj(A) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}^t$$

Maxima La matriz adjunta de A es

```
(% i1)  A:matrix([2,-4,6],[5,1,0],[1,1,0])
```

(% o1) $\begin{bmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 5 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

```
(% i2)  adjoint(A)
```

(% o2) $\begin{bmatrix} 0 & 6 & -6 \\ 0 & -6 & 30 \\ 4 & -6 & 22 \end{bmatrix}$

Teorema 21 Si $A \in M_{n,n}$ invertible, entonces:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj(A)$$

Ejemplo 65 Determinar la inversa de:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Solución. El determinante es $|A| = ad - bc$, y la adjunta es

$$adj(A) = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

por tanto:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Ejemplo 66 Determinar la inversa de:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución. El determinante es $|A| = 40$ y la adjunta es:

$$adj(A) = \begin{pmatrix} -8 & 4 & 8 \\ 6 & -8 & 14 \\ 12 & 4 & -12 \end{pmatrix}$$

por tanto

$$A^{-1} = \frac{1}{40} \begin{pmatrix} -8 & 4 & 8 \\ 6 & -8 & 14 \\ 12 & 4 & -12 \end{pmatrix}$$

Ejercicios propuestos

1) Sean A, B, C matrices con las dimensiones adecuadas, ¿Bajo que condiciones $AB = AC$ implica $B = C$?.

2) Determinar la inversa de $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 8 & 2 & 3 \\ -10 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

Sol. $\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 3 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

3) Determinar la inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

Sol. No existe.

4) ¿Cuándo la siguiente matriz es invertible?, ¿Cuál es su inversa?
$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$
5) Probar que la inversa de una matriz triangular es del mismo tipo.
6) Pruebe que si $A \in M_{n,n}$ es invertible, entonces $|adj(A)| = |A|^{n-1}$.
7) Utilizando ***Maxima***,¿Para qué valores de a y b la siguiente matriz es invertible?
$$\begin{pmatrix} -2 & -a & -4-a-2b \\ 2 & 1+a & 3+b \\ 1 & 0 & 2+a+b \end{pmatrix}$$

Sol. $a \neq 0$ y $a \neq -b$.

8) Sea $A \in M_{2,2}$ una matriz invertible tal que $|A| = -1$. Encuentre todas las matrices A tales que $A^{-1} = A$.
9) Considérese la matriz: $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{n+n-1} \end{pmatrix}$
   a) Utilizando ***Maxima***,Calcule la inversa para $n = 2$, $n = 3$ y $n = 4$.
   b) Conjeture una fórmula para su inversa.
10) Sea $A \in M_{n,n}$. Pruebe que:
   a) Si A es invertible y $AB = 0$ para alguna matriz $B \in M_{n,n}$, entonces $B = 0$.
   b) Si A es no invertible, entonces existe una matriz $B \in M_{n,n}$ tal que $AB = 0$ pero $B \neq 0$.
11) Suponga que $I - AB$ es invertible. Pruébese que si $I - BA$ es invertible, entonces
$$(I-BA)^{-1} = I + B(I-AB)^{-1}A.$$
(Sug. Conviene partir de la identidad $I - AB = I - AB$ y hacer $C = (I - BA)$)
12) Sean A, B y $A + B$ matrices invertibles. Pruébese que $A^{-1} + B^{-1}$ es invertible. (Sug. Puede partir de $B^{-1}(A+B)A^{-1}$)
13) Muestre que si $A \in M_{n,n}$, entonces: $\begin{pmatrix} I & A \\ 0 & I \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} I & -A \\ 0 & I \end{pmatrix}$ donde I es la matriz identidad.

14) Sean A y B cuadradas, no necesariamente del mismo orden, sea C del orden adecuado. Suponga que se cumple: $\begin{vmatrix} A & C \\ 0 & B \end{vmatrix} = |A|\,|B|$ Probar que si X, Y son cuadradas, no necesariamente del mismo orden, U, V del orden adecuado y X una matriz invertible, entonces se cumple: $\begin{vmatrix} X & U \\ V & Y \end{vmatrix} = |X|\,\left|Y - VX^{-1}U\right|$ Sug. Emplee la matriz $\begin{pmatrix} I & 0 \\ -VX^{-1} & I \end{pmatrix}$.

3.6 La regla de Cramer

Teorema 22 (Regla de Cramer [1])

Considere el sistema $Ax = b$, $A \in M_{n,n}$. Supóngase que $|A| \neq 0$, si $A = \left[A^1, A^2, \ldots, A^n\right]$, donde A^j es la $j-$*ésima* columna de A, y

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

entonces las soluciones son:

$$x_i = \frac{\left|A^1, \ldots, A^{i-1}, b, A^{i+1}, \ldots, A^n\right|}{|A|},\ i = 1, 2, \ldots, n$$

Nótese que $\left|A^1, \ldots, A^{i-1}, b, A^{i+1}, \ldots, A^n\right|$ se obtiene de $|A|$ reemplazando la $i-$*ésima* columna con el vector b.

Ejemplo 67 Resolver:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Solución.

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\ x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

Ejemplo 68 Resolver:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -10 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Solución.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -10 & 0 & -2 \\ 15 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{-4}{-2},\ y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -10 & -2 \\ 0 & 15 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{-2}{-2},\ z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -10 \\ 0 & 1 & 15 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{-14}{-2}$$

[1] Fuente `http://www.biografiasyvidas.com/`. Ginebra, Suiza, 1704-Bagnols-sur-Cèze, Francia, 1752) Matemático suizo. Fue catedrático de matemáticas (1724-1727) y de filosofía (1750-1752) en la Universidad de Ginebra. En 1750 expuso en Introducción al análisis de las curvas algebraicas la teoría newtoniana referente a las curvas algebraicas, clasificándolas según el grado de la ecuación. Reintrodujo el determinante, algoritmo que Leibniz ya había utilizado al final del siglo XVII para resolver sistemas de ecuaciones lineales con varias incógnitas. Editó las obras de Jakob Bernoulli y parte de la correspondencia de Leibniz.

por tanto la solución es:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Ejercicios propuestos

1) Utilizando ***Maxima*** determine los valores de c de modo que para resolver el siguiente sistema se pueda emplear la regla de Cramer.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -c \\ 1 & -c & 2 \\ 2 & 1 & -c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

2) Aplique la regla de Cramer para calcular el determinante de:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}$$

3) Aplique la regla de Cramer para despejar x' y y' en términos de x y y.

$$\begin{aligned} x &= x' \cos\theta - y' \sin\theta \\ y &= x' \sin\theta + y' \cos\theta \end{aligned}$$

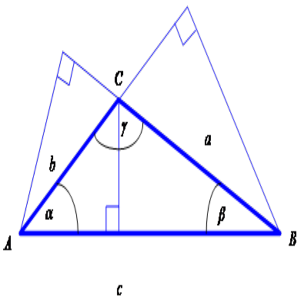
4) Considérese el triángulo de vértices ABC mostrado en la figura (en donde ya se han trazado las alturas).

   a) Empleando resultados de triángulos rectángulos, demuestre que los cosenos de los ángulos interiores satisfacen el sistema:

$$\begin{pmatrix} 0 & c & b \\ c & 0 & a \\ b & a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

   b) Use la regla de Cramer para calcular los cosenos.

   c) A partir de lo anterior demostrar el teorema de cosenos.



3.7 Sistemas homogéneos

Se dice que un sistema es homogéneo si es de la forma:

$$Ax = 0, \; A \in M_{m,n}$$

nótese que el vector $x = 0$ (0 no necesariamente es el cero de los números reales) es una solución del sistema, así un sistema homogéneo siempre tiene solución. Por tanto sólo se tienen los siguientes casos:

(i) Solución única.

(ii) Infinitas soluciones.
A este respecto se tiene el siguiente resultado:

Teorema 23 Sea $A \in M_{n,n}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:
1) $Ax = 0$ tiene solución única.
2) A^{-1} existe.
3) $rango\,(A) = n$.
4) $|A| = \det(A) \neq 0$.

Ejemplo 69

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La matriz aumentada para sistemas homogéneos es de la forma $[A:0]$, en la práctica sólo se trabaja con A. Con esta convención se tiene:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[f_{21(-3)}]{} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & 1 \\ 0 & -\mathbf{1} & -2 \end{pmatrix},$$

claramente, el sistema tiene soluciones. La *variable libre* es x_3. Sea $x_3 = t$, $t \in \mathbb{R}$, así el sistema se transforma en

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ 2t \end{pmatrix}$$

resolviendo por sustitución inversa se tiene sucesivamente:

$$\begin{aligned} x_2 &= -2t \\ x_1 &= -t - 2(-2t) \\ &= 3t \end{aligned}$$

por tanto la solución del sistema es:

$$x = \begin{pmatrix} 3t \\ -2t \\ t \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}$$

el sistema tiene infinitas soluciones (para cada valor de t se tiene una solución).

Ejemplo 70 Resolver

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Solución.

$$[A:b] = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[f_{21(2)}]{f_{31(-1)} \atop f_{41(1)}}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[f_{24}]{} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[f_{32(2)}]{f_{42(-3)}} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix} \xrightarrow[f_{43(1)}]{} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esta matriz no tiene variables libres. Por otra parte el sistema tiene solución única pues $rango\,(A) = rango\,[A:b] = 3$. Empleando sustitución inversa se tiene:

$$\begin{aligned} x_3 &= 0 \\ x_2 &= 0 \\ x_1 &= 0 \end{aligned}$$

Por tanto la solución del sistema es:

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 71 Resolver

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Solución.

$$[A:b] = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[f_{21(-3)}]{f_{31(-1)}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[f_{32(-2)}]{} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

las variables libres son: x_2 y x_4. Sean

$$\begin{aligned} x_2 &= t \\ x_4 &= s \end{aligned}$$

entonces, el sistema se convierte en:

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= x_2 - x_4 \\ x_3 &= -2x_4 \end{aligned}$$

reemplazando $x_2 = t$ y $x_4 = s$, se tiene el sistema triangular

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= t - s \\ x_3 &= -2s \end{aligned}$$

de donde sucesivamente:

$$\begin{aligned} x_3 &= -2s \\ x_1 &= t - s - (-2s) \\ &= t + s \end{aligned}$$

por tanto la solución del sistema es:

$$x = \begin{pmatrix} t+s \\ t \\ -2s \\ s \end{pmatrix}, \; t, s \in \mathbf{R}$$

Nótese que la solución puede escribirse como:

$$x = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicios propuestos

1) Resolver

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -5 & -1 & -4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sol. $x = \begin{pmatrix} -t \\ t \\ t \end{pmatrix}$.

2) Resolver:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sol. $x = \begin{pmatrix} -t \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$

3) Utilizando ***Maxima***. Para que valores de k, el siguiente sistema (i) tiene la solución nula como única solución. (ii) Infinitas soluciones.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1+k & 1 \\ 1 & -1 & -3+k^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sol. (i) $k \notin \{0,2,-2\}$ (ii) $k \in \{0,2,-2\}$.

4) Sea:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

(i) determinar los valores de λ tales que $|A - \lambda I| = 0$,
(ii) para cada valor encontrado en (i) resolver el sistema $(A - \lambda I)x = 0$

Sol.: , $t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ asociado con 5, $t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ asociado con 1, $t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ asociado con -5

5) Lo mismo que en el anterior ejercicio para la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} -10 & 15 & -15 \\ -6 & 11 & -6 \\ 3 & -3 & 8 \end{pmatrix}$$

$t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ asociados con 5, $t \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ asociado con -1.

3.8 Algo de criptografía

3.8.1 La aritmética del reloj

Considérese un reloj como el siguiente: Supóngase que el reloj marca las 9, si transcurren 8 horas, entonces el reloj marcará 5. Para nosotros, 9+8=17, sin embargo para el reloj apenas pasa de 12 vuelve a empezar en cero. Para explicar este hecho requerimos la siguiente definición.

Definición 41 **(Congruencia módulo n)** Diremos que dos enteros a y b son congruentes módulo n, lo que escribimos

$$a \equiv b \pmod{n} \qquad \text{"se lee } a \text{ congruente con } b \text{ módulo } n\text{"}$$

si n divide a la diferencia $a-b$, se escribe también $n|(a-b)$

Ejemplo 72 **(Congruencia módulo 12)**

$$17 \equiv 5 \pmod{12} \text{ pues } 12|(17-5)$$
$$25 \equiv 1 \pmod{12} \text{ pues } 12|(25-1)$$

Ejemplo 73 **(Congruencia módulo 7)**

$$17 \equiv 3 \pmod{7} \text{ pues } 7|(17-3)$$
$$972 \equiv 6 \pmod{7} \text{ pues } 7|(972-6)$$

3.8.2 Tablas de sumar

En la aritmética del reloj, podemos realizar operaciones de sumas, restas, multiplicación y división. A continuación se muestran las tablas de la suma y producto en módulo 12:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	0	2	4	6	8	10	0	2	4	6	8	10
3	0	3	6	9	0	3	6	9	0	3	6	9
4	0	4	8	0	4	8	0	4	8	0	4	8
5	0	5	10	3	8	1	6	11	4	9	2	7
6	0	6	0	6	0	6	0	6	0	6	0	6
7	0	7	2	9	4	11	6	1	8	3	10	5
8	0	8	4	0	8	4	0	8	4	0	8	4
9	0	9	6	3	0	9	6	3	0	9	6	3
10	0	10	8	6	4	2	0	10	8	6	4	2
11	0	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

A continuación se presenta la tabla de multiplicar en módulo 28, nótese que sólo algunos números tienen inverso multiplicativo, por ejemplo $3^{-1} = 19$ pues $19 \times 3 = 57 \equiv 1$ mod 28.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
2	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26
3	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27	2	5	8	11	14	17	20	23	26	1	4	7	10	13	16	19	22	25
4	0	4	8	12	16	20	24	0	4	8	12	16	20	24	0	4	8	12	16	20	24	0	4	8	12	16	20	24
5	0	5	10	15	20	25	2	7	12	17	22	27	4	9	14	19	24	1	6	11	16	21	26	3	8	13	18	23
6	0	6	12	18	24	2	8	14	20	26	4	10	16	22	0	6	12	18	24	2	8	14	20	26	4	10	16	22
7	0	7	14	21	0	7	14	21	0	7	14	21	0	7	14	21	0	7	14	21	0	7	14	21	0	7	14	21
8	0	8	16	24	4	12	20	0	8	16	24	4	12	20	0	8	16	24	4	12	20	0	8	16	24	4	12	20
9	0	9	18	27	8	17	26	7	16	25	6	15	24	5	14	23	4	13	22	3	12	21	2	11	20	1	10	19
10	0	10	20	2	12	22	4	14	24	6	16	26	8	18	0	10	20	2	12	22	4	14	24	6	16	26	8	18
11	0	11	22	5	16	27	10	21	4	15	26	9	20	3	14	25	8	19	2	13	24	7	18	1	12	23	6	17
12	0	12	24	8	20	4	16	0	12	24	8	20	4	16	0	12	24	8	20	4	16	0	12	24	8	20	4	16
13	0	13	26	11	24	9	22	7	20	5	18	3	16	1	14	27	12	25	10	23	8	21	6	19	4	17	2	15
14	0	14	0	14	0	14	0	14	0	14	0	14	0	14	0	14	0	14	0	14	0	14	0	14	0	14	0	14
15	0	15	2	17	4	19	6	21	8	23	10	25	12	27	14	1	16	3	18	5	20	7	22	9	24	11	26	13
16	0	16	4	20	8	24	12	0	16	4	20	8	24	12	0	16	4	20	8	24	12	0	16	4	20	8	24	12
17	0	17	6	23	12	1	18	7	24	13	2	19	8	25	14	3	20	9	26	15	4	21	10	27	16	5	22	11
18	0	18	8	26	16	6	24	14	4	22	12	2	20	10	0	18	8	26	16	6	24	14	4	22	12	2	20	10
19	0	19	10	1	20	11	2	21	12	3	22	13	4	23	14	5	24	15	6	25	16	7	26	17	8	27	18	9
20	0	20	12	4	24	16	8	0	20	12	4	24	16	8	0	20	12	4	24	16	8	0	20	12	4	24	16	8
21	0	21	14	7	0	21	14	7	0	21	14	7	0	21	14	7	0	21	14	7	0	21	14	7	0	21	14	7
22	0	22	16	10	4	26	20	14	8	2	24	18	12	6	0	22	16	10	4	26	20	14	8	2	24	18	12	6
23	0	23	18	13	8	3	26	21	16	11	6	1	24	19	14	9	4	27	22	17	12	7	2	25	20	15	10	5
24	0	24	20	16	12	8	4	0	24	20	16	12	8	4	0	24	20	16	12	8	4	0	24	20	16	12	8	4
25	0	25	22	19	16	13	10	7	4	1	26	23	20	17	14	11	8	5	2	27	24	21	18	15	12	9	6	3
26	0	26	24	22	20	18	16	14	12	10	8	6	4	2	0	26	24	22	20	18	16	14	12	10	8	6	4	2
27	0	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

3.8.3 Matriz clave

Es una matriz cuadrada $A \in M_{m.m}$ invertible módulo 28. Es fácil producir estas matrices, por ejemplo multiplicar dos matrices, una triangular inferior, de determinante cualquiera de los números del conjunto $\{1,3,5,9,11,13,15,17,19,23,25,27\}$ y la otra una triangular superior de determinante 1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix},$$

claramente el determinante de esta matriz es $|A| = 3$, puesto que $3^{-1} = 19$ existe en módulo 28, la inversa de A existe. Calculando la inversa mediante la técnica de la adjunta, se encuentra:

$$\begin{aligned}
A^{-1} &= \frac{1}{|A|} adj(A) \\
&= 3^{-1} \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^t \\
&= 19 \begin{pmatrix} 9 & -6 & 0 \\ -3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 171 & -114 & 0 \\ -57 & 76 & -19 \\ 0 & -19 & 19 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 3 & 26 & 0 \\ 27 & 20 & 9 \\ 0 & 9 & 19 \end{pmatrix}^t \text{módulo } 28 \\
&= \begin{pmatrix} 3 & 27 & 0 \\ 26 & 20 & 9 \\ 0 & 9 & 19 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Nótese que ,

$$\begin{aligned}
AA^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 27 & 0 \\ 26 & 20 & 9 \\ 0 & 9 & 19 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 29 & 56 & 28 \\ 84 & 141 & 84 \\ 84 & 168 & 141 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{mod } 28
\end{aligned}$$

3.8.4 Mensajes en clave

Nuestro objetivo es emplear la inversión de matrices junto con la aritmética módulo 28 en el proceso de escribir mensajes en clave. Para este propósito consideremos una cadena de caracteres que llamaremos **mensaje**, por razones de simplicidad, el mensaje se escribirá con el alfabeto de 27 letras en minúsculas mas un espacio.

a b c d e f g h i j k l m n ñ o p q r s t u v w x y z

Paso 1. El **mensaje** a encriptar de divide en cadenas de m caracteres, formándose vectores columna de m lugares (se añaden espacios en blanco si es necesario), estas cadenas se traducen en

cadenas numéricas con el siguiente criterio:

espacio	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

n	ñ	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27

Con los vectores numéricos hallados se contruye una matriz M de m filas.

Ejemplo 74 Consideremos el mensaje:

$$algebra$$

(omitimos el tilde) si las cadenas van a ser de 3 caracteres se tienen los vectores:

$$\begin{pmatrix} a \\ l \\ g \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e \\ b \\ r \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ \text{espacio} \\ \text{espacio} \end{pmatrix}$$

que traducidos son

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 12 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 19 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

finalmente la matriz numérica que contiene el mensaje es:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 12 & 2 & 0 \\ 7 & 19 & 0 \end{pmatrix}$$

Paso 2. Se elige una matriz invertible $A \in M_{m,m}$. Luego contruimos la matriz $C = AM$ que contendrá nuestro **mensaje en clave**. Elegimos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

luego:

$$\begin{aligned} C &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 12 & 2 & 0 \\ 7 & 19 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 20 & 26 & 1 \\ 59 & 73 & 2 \\ 80 & 130 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 20 & 26 & 1 \\ 3 & 17 & 2 \\ 24 & 18 & 2 \end{pmatrix} \mod 28 \end{aligned}$$

traducimos ahora la matriz C a caracteres empleando la tabla dada, obteniéndose

$$\begin{pmatrix} s \\ c \\ w \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ p \\ q \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \\ b \end{pmatrix}$$

por tanto el mensaje en clave es:

scwypqabb

Nótese que una misma letra puede codificarse con una letra distinta o igual, como es el caso de la letra a que se codifica como s y a y el espacio que se codifica como la letra b en ambos casos.

Paso 3. (Recuperación de la información) Puesto que $C = AM$ y A es invertible, entonces $M = A^{-1}C$, por tanto para nuestro ejemplo:

$$
\begin{aligned}
M &= \begin{pmatrix} 3 & 27 & 0 \\ 26 & 20 & 9 \\ 0 & 9 & 19 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 & 26 & 1 \\ 3 & 17 & 2 \\ 24 & 18 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 141 & 537 & 57 \\ 796 & 1178 & 84 \\ 483 & 495 & 56 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 12 & 2 & 0 \\ 7 & 19 & 0 \end{pmatrix} \bmod 28
\end{aligned}
$$

por tanto el mensaje recuperado es:

ALGEBRA

Ejercicios propuestos

En los siguientes problemas se debe trabajar con aritmética modular módulo 28

1) Sabiendo que la matriz invertible módulo 28 es $A = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
   a) Decodificar el mensaje *DZEAE JB* . Sol. EXA UPB
   b) Decodificar el mensaje *ÑGÑRRELZPD*. Sol. COCHABAMBA
2) Sabiendo que la matriz invertible módulo 28 es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

   a) Decodificar el mensaje *BDLMBAABB*. Sol. BOLIVIA
   b) Decodificar el mensaje *ZBÑNMWYMHMJKJTTBDLMBAABB*. Sol. VIVA MI PATRIA BOLIVIA

3.9 ¿Sabias que?

(Tomado de http://200.109.120.2/mm/matematica3/fasciculo23.pdf**)**

Ya en el año 450 a.C. los espartanos de Grecia enviaban mensajes codificados. Para ello enrollaban una banda de cuero o cinturón sobre un cilindro, se escribía el mensaje y al desenrollar la banda de cuero ésta parecía que sólo estaba adornada con marcas inocentes. Sin embargo, si el destinatario del mensaje arrollaba nuevamente la banda alrededor de un cilindro similar al utilizado cuando se escribió dicho mensaje, éste podía ser leído sin dificultad. Este método es un sistema de codificación por transposición.

En el cifrado por sustitución, cada letra o grupo de letras es reemplazada por una letra o grupo de letras. Uno de los más antiguos cifrados es el ”Cifrado de César”, atribuido a Julio César, quien sustituyó cada letra por la que ocupa tres puestos más allá en el alfabeto. Con ese método, a se convierte en D, b en E, c en F,..., y z en C.

Una técnica de codificación por sustitución fue utilizada por el insigne escritor estadounidense Edgar Allan Poe (1809-1849) en su célebre narración El escarabajo de oro. También este tipo de técnica aparece con frecuencia en diarios y pasatiempos en los cuales se le propone al lector la solución de un criptograma.

En el siglo XIII, Roger Bacon (1214-1294) describió varios métodos de codificación. De trascendental importancia, durante la II Guerra Mundial, fue el hecho de que los estadounidenses lograran descifrar el código naval japonés JN25 y los ingleses hiciesen lo propio con la máquina alemana Enigma. Actualmente se utilizan sofisticadas técnicas de encriptamiento de mensajes las cuales se basan en las propiedades de los números primos.

Uno de los sistemas modernos para encriptar mensajes es el criptosistema de clave pública. Uno de éstos es el sistema RSA (en honor de sus creadores los matemáticos Rivest, Shamir y Adler).

3.10 Problemas con sistemas de ecuaciones

Ejemplo 75 Un criadero de peces produce tres tipos de peces. Un pez de la especie I consume por semana, un promedio de una unidad del alimento 1, dos unidades del alimento 2 y dos unidades del alimento 3. Un pez de la especie II consume por semana dos unidades del alimento 1, una unidad del alimento 2 y dos unidades del alimento 3. Finalmente un pez de la especie III consume dos, una y una unidades de los alimentos 1, 2, 3 respectivamente. En el criadero se disponen semanalmente de 12000 unidades del alimento 1, 9000 unidades del alimento 2 y 10000 unidades del alimento 3. Asumiendo que todo el alimento se consume, ¿cuántos peces de cada especie pueden mantenerse en el criadero?.

Solución. Los datos se pueden escribir de la siguiete manera

$$\begin{array}{cccccc} \text{Alimento} & \text{Especie} & & \text{Especie} & & \text{Alimento} \\ \downarrow & \text{I} \quad \text{II} \quad \text{III} & & \downarrow & & \downarrow \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{matrix} & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 12000 \\ 9000 \\ 10000 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12000 \\ 9000 \\ 10000 \end{pmatrix}$$

Resolviendo se encuentra: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2000 \\ 1000 \\ 4000 \end{pmatrix}$

Ejercicios

1) Una compañia tiene tres plantas de producción P1, P2, P3. En cada una de estas plantas se fabrican tres productos A, B, C. Supongamos que de una unidad de insumo se sabe que: La primera planta produce 4 de A, 2 de B y 4 de C; la segunda planta produce 5 de A, 4 e B y 2 de C; la tercera planta produce 2 de A, 4 e B y 5 de C. Las demandas a la compañia de estos tres productos son 1700 de A, 1600 de B y 1550 de C. ¿Cuántas unidades de insumo requiere cada planta para satisfacer la demanda?. Sol. $100, 200, 150$.
2) Un turista muestra su registro de gastos en alojamiento, comidas y varios de un viaje por Bolivia. (a) El turista muestra que en hospedaje gastó por día Bs 200 en Cochabamba, 225 en Santa Cruz y 450 en La Paz. En comida, el registro indica que gasto Bs. 260, 250, 630 en Cochabamba, Santa Cruz y La Paz respectivamente. Finalmente en varios, el turista muestra que gastó Bs. 180, 150, 300 en Cochabamba, Santa Cruz y La Paz respectivamente. Calcular el número de días que permaneció el turista en cada una de las poblaciones si su registro muestra que gasto Bs. 5050 en hospedaje, Bs. 6710 en comida y Bs. 3600 en varios. Sol. $5, 4, 7$.
3) Un nutricionista debe preparar una dieta que de tres alimentos **Arroz** , **Carne** y **Lentejas**, cada alimento contiene a su vez **grasa**, **proteina** y **carbohidratos**. Cada 100 gramos de arroz contiene 0,8 g de grasa, 7 g de proteina y 80 g de carbohidratos. Cada 100 gramos de carne contiene 25, 17, 0,1 gramos de de grasa, proteina y carbohidratos respectivamente. Cada 100 gramos de lenteja contiene 2, 22, 62,5 gramos de de grasa, proteina y carbohidratos respectivamente. Si los requerimientos diarios de grasa, proteina y carbohidratos que se debe obtener con estos alimentos son 20, 25 y 50. ¿Cuántas unidades de los alimentos se deben consumir para satisfacer los requerimientos ? (1 unidad de alimento = 100 gramos). Sol. 25,5 gramos de arroz, 75,4 gramos de carne, 47,3 gramos de lenteja.
4) Un médico prescribe a una paciente 8 unidades de vitamina A, 14 unidades de vitamina D y 22 unidades de vitamina E diariamente. El paciente puede elegir entre tres marcas de píldoras que contienen esta vitaminas. La marca **ALPHA** contiene 2 unidades de vitamina A, 2 unidades de vitamina D y 4 de vitamina E. La marca **VITA** contiene 1 unidades de vitamina A, 4 unidades de vitamina D y 5 de vitamina E. La marca **VIDA** contiene 1 unidades de vitamina A, 1 unidades de vitamina D y 2 de vitamina E. Encuentre todas las combinaciones posibles de las marcas que proporcione las cantidades requeridas. Sol. $(\text{ALPHA}, \text{VITA}, \text{VIDA}) = (0,2,6), (1,2,4), (2,2,2), (3,2,0)$
5) Una compañia produce tres artículos X, Y, Z. Estos artículos se procesan en tres máquinas $M1$, $M2$, $M3$. El tiempo, en horas, empleado por cada máquina para procesar cada producto

se muestra en la siguiente tabla:

Maquinas

Artículos		M1	M2	M3
	X	2	1	3
	Y	3	2	1
	Z	2	2	1

Las máquinas M1, M2, M3 estás disponibles 1050, 800, y 650 horas respectivamente. Determinar la cantidad de artículos que deben producirse para emplear todo el tiempo disponible de las máquinas. Sol. $100, 150, 200$.

6) Cierta fábrica emplea tres máquinas en la elaboracion de cuatro productos diferentes. Las maquinas se utilizan 24 horas al día. La siguiente tabla da el número de horas que cada máquina requiere para elaborar una unidad de cada producto.

Productos

Máquinas		P1	P2	P3	P4
	M1	2	2	0	2
	M2	1	2	2	1
	M3	2	1	1	1

Determinar el número de unidades de cada producto que la fábrica puede elaborarar en un día.

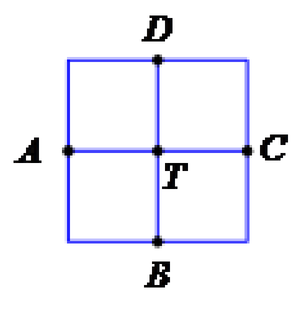
Sol. Tres posibles soluciones:

Producto 1:	6	7	8
Producto 2:	0	2	4
Producto 3:	6	5	4
Producto 4:	6	3	0

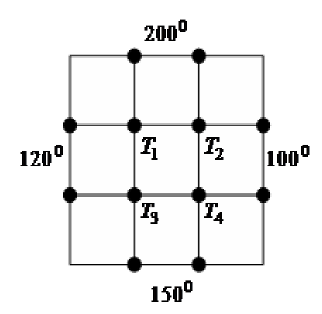
7) Un fabricante de muebles fabrica sillas, mesas y puertas. Se necesitan 12 minutos para lijar una silla, 6 para pintarla y 10 para barnizarla. Se requieren 15, 12 y 14 minutos para lijar, pintar y barnizar una mesa respectivamente, finalmente se requieren 7,2,16 minutos para lijar, pintar y barnizar una puerta. Existen semanalmente 14 horas de lijado, 7 horas de pintado y 18 horas de barnizado. ¿Cuántas unidades de cada mueble deben fabricarse si se deben emplear toda la capacidad de lijado, pintado y barnizado?. Sol.: 40,10,30.

8) En una placa con puntos igualmente espaciados, la temperatura de un punto es aproximadamente el promedio de las cuatro temperaturas adyacentes, por ejemplo en la figura que se muestra a continuación

$$T = \frac{A+B+C+D}{4}$$

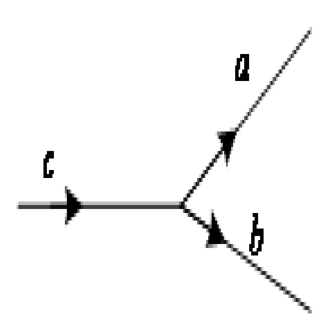


En la siguiente gráfica, aproximar las temperaturas T_1, T_2, T_3 y T_4.

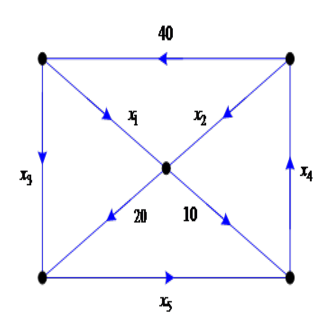


Sol. : $T_1 = 151.25$, $T_2 = 146.25$, $T_3 = 138.75$, $T_4 = 133.75$.

9) **Modelo en redes.** En estos modelos se asume que el flujo total en un punto es igual al flujo que sale. En el siguiente ejemplo: $c = a + b$.

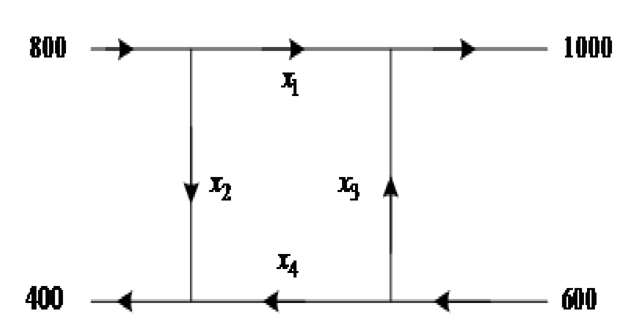


En la siguiente red determinar los valores de x_j, $j = 1,2,3,4,5$.



Sol.: $x_1 = 60 - t$, $x_2 = -30 + t$, $x_3 = -20 + t$, $x_4 = 10 + t$, $x_5 = t$, de donde se sigue que hay infinitas soluciones.

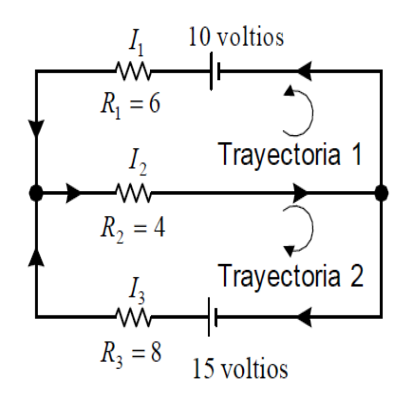
10) La siguiente figura representa un acueducto, por donde fluye el agua en miles de metros cúbicos por hora. Determine los caudales x_1, x_2, x_3, x_4.



Sol. $x_1 = 400 + t$, $x_2 = 400 - t$, $x_3 = 600 - t$, $x_4 = t$, de esto se deduce que hay infinitas soluciones.

11) **(Leyes de Kirchhoff)** En el análisis de redes eléctricas, las leyes de Kirchhoff establecen:
(a) En cualquier punto, la suma de la corriente que entra en ese punto es igual a la suma de la corriente que sale.

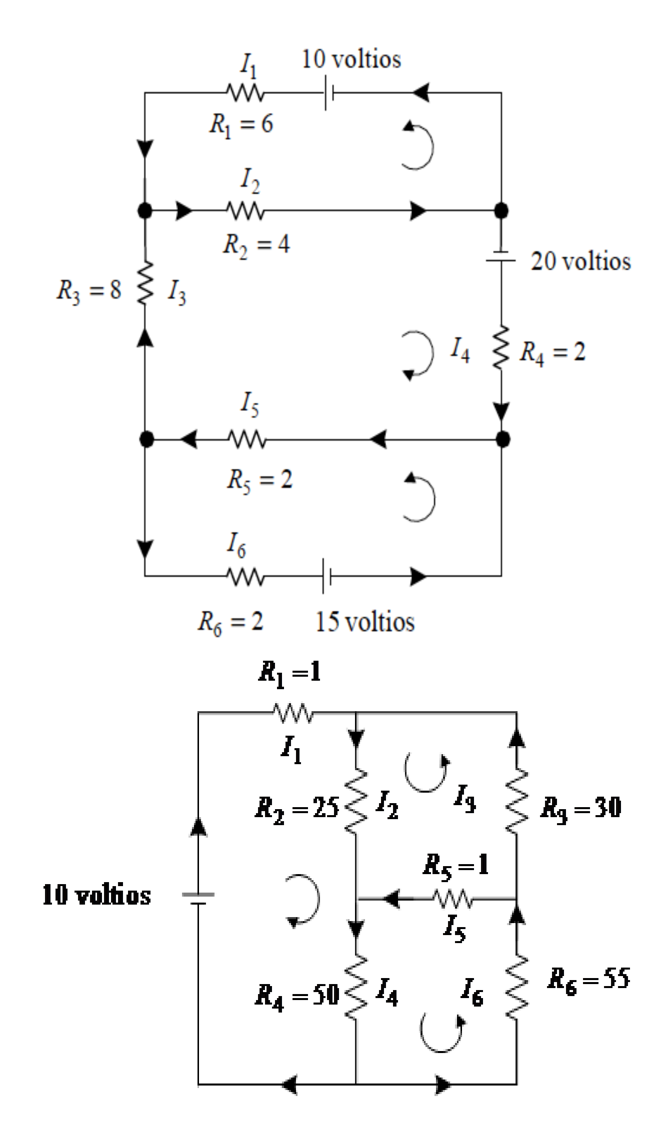
(b) En toda malla la suma de todas las caídas de tensión es igual a la tensión total suministrada. Como ejemplo considérese la siguiente malla:



aplicando las leyes citadas se encuentra el sistema:

$$\begin{aligned} I_1 + I_3 &= I_2 \\ 6I_1 + 4I_2 &= 10 \\ 8I_3 + 4I_2 &= 15 \end{aligned}$$

resolviendo se encuentra: $I_1 = \frac{15}{26}$, $I_2 = \frac{85}{52}$, $I_3 = \frac{55}{52}$.
Resolver las siguientes mallas:



12) La suma de las edades de tres hermanos es de 60 años. La edad del mayor es igual a la suma de las edades de sus hermanos menores. Dentro de 10 años, el mayor doblará la edad del menor. Calcula la edad actual de cada uno de los hermanos. Sol. : $20, 10, 30$
13) Una empresa de alquiler de buses dispone de 12 buses destinados a organizaciones empresariales y equipos deportivos. Dispone de tres tipos de buses: el **tipo I** es un bus grande con capacidad para 41 pasajeros, este tipo de bus a **tres personas** como empleados para operar el bus (dos conductores y un ayudante); el **tipo II** es un bus mediano con capacidad para 25 y tiene a **dos empleados** para operar el bus (un conductor y un ayudante); el **tipo III** es un bus pequeño con capacidad para 6 y está operado por **un empleado** (un conductor). Cierto día se ocuparon todos los buses completos. En ellos iban 237 pasajeros y 21 empleados. ¿Cuántos buses de cada tipo tiene la empresa?. Sol.: $2, 5, 5$.
14) Halla un número de tres cifras sabiendo que éstas suman 16. Además, la cifra de las decenas es igual a la suma de las otras dos y, por último, si a este número le restamos el que resulta de invertir el orden de sus cifras, el resultado es 396. Sol.: 682.
15) Una matriz $A \in M_{3,3}$ es mágica si la suma de cada fila, cada columna y las dos diagonales es el mismo valor. Halle todas las matrices mágicas en $M_{3,3}$.

Sol. $M = \begin{pmatrix} r & \frac{2S-3r}{3} & \frac{S}{3} \\ \frac{2S-3r}{3} & \frac{S}{3} & r \\ \frac{S}{3} & r & \frac{2S-3r}{3} \end{pmatrix}$, donde S es la suma común.

16) Tres productos químicos X; Y y Z, tienen los siguientes porcentajes de Fe, Zn y Cu:

	Fe	Zn	Cu
X	40	30	30
Y	30	40	30
Z	10	50	40

¿Cuánto de cada producto debe combinarse para obtener un nuevo producto que contenga 23 % de Fe, 42 % de Zn y 35 % de Cu? . Sol. X, 30 %; Y, 20 %; Z, 50 % .

4 — Espacios Vectoriales reales

Con el propósito de aplicar el Álgebra lineal en Ingeniería y otras ciencias, es necesario dotar a un conjunto de la estructura llamada **Espacio Vectorial**, en este capítulo estudiamos este concepto, además se estudian los **subespacios**, los **subespacios generados** por un conjunto de vectores y el concepto de **dependencia lineal.** Luego de esto se estudia el concepto de **base** y **dimensión** de un Espacio Vectorial.

4.1 La definición de espacio vectorial

En anteriores secciones se trabajó con objetos del conjunto $M_{m,n}$. En este conjunto no se ha dicho nada sobre aspectos como la "medida de cada elemento". Para poder discutir estos aspectos es necesario definir el concepto de espacio vectorial.

Definición 42 **(Espacio Vectorial)** Sea V un conjunto no vacío, en donde se han definido dos operaciones llamadas suma y producto por escalar tal que para todo $u, v \in V$ se tiene $u+v \in V$ y para todo $u \in V$ y todo $r \in \mathbb{R}$ se tiene $rv \in V$. El conjunto V se llamará Espacio Vectorial real (y sus elementos se llamarán vectores) si se cumplen las siguientes propiedades:

$\mathbf{A}_1$: Para todo $u, v \in V$, $u+v = v+u$.
$\mathbf{A}_2$: Para todo $u, v, w \in V$, $u+(v+w) = (u+v)+w$.
$\mathbf{A}_3$: Existe un vector en V denotado por 0 "vector cero" tal que $0+u = u$ para todo $u \in V$.
$\mathbf{A}_4$: Para todo $u \in V$, existe $-u \in V$ tal que $u+(-u) = 0$.
$\mathbf{M}_1$: Para todo $k \in \mathbb{R}$ y todo $u, v \in V$, $k(u+v) = ku+kv$.
$\mathbf{M}_2$: Para todo $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ y todo $u \in V$, $(k_1+k_2)u = k_1u+k_2u$.
$\mathbf{M}_3$: Para todo $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ y todo $u \in V$, $k_1(k_2u) = (k_1k_2)u$.
$\mathbf{M}_4$: Para $1 \in \mathbb{R}$, $1u = u$, para todo $u \in V$

Ejemplo 76 Considere el conjunto $V = \{X : X \in M_{m,n}\}$, esto es, todas las matrices de m filas y n columnas, en este conjunto se definen las operaciones usuales de suma de matrices y producto por un número definidos en el capítulo 1. Es evidente que $M_{m,n}$ es un Espacio Vectorial.

Observación. Un conjunto V no es espacio vectorial por si solo, es necesario definir en ella las dos operaciones de suma y producto por escalar. Más aún un, mismo conjunto puede ser o no espacio vectorial dependiendo de las operaciones definidas en V, esto muestra la importancia de las operaciones que se definan en el conjunto.

Ejemplo 77 Sea $V = \mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2) : x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R}\}$, en este conjunto definimos las siguientes operaciones:

$$\begin{aligned} (a_1, a_2) + (b_1, b_2) &= (a_1+b_1, a_2+b_2) \\ \alpha(a_1, a_2) &= (\alpha a_1, a_2) \end{aligned}$$

Es fácil comprobar que A_1, A_2, A_3, A_4 se verifican. Para probar M_1, sean

$$u = (u_1, u_2), \quad v = (v_1, v_2)$$

entonces para un número k:

$$\begin{aligned} k(u+v) &= k(u_1+v_1, u_2+v_2) = (ku_1+kv_1, u_2+v_2) \\ ku+kv &= k(u_1,u_2)+k(v_1,v_2) = (ku_1,u_2)+(kv_1,v_2) = (ku_1+kv_1, u_2+v_2) \end{aligned}$$

$\therefore$

$$k(u+v) = ku+kv,$$

esto prueba que M_1 se cumple. Para probar M_2 sea $u = (u_1,u_2)$, $k_1 = 3$, $k_2 = 2$, entonces:

$$(k_1+k_2)u = (3+2)(u_1,u_2) = (5u_1,u_2)$$

por otra parte:

$$k_1u+k_2u = 3(u_1,u_2)+2(u_1,u_2) = (3u_1,u_2)+(2u_1,u_2) = (5u_1,2u_2)$$

por tanto $(k_1+k_2)u \neq k_1u+k_2u$. Esto prueba que M_2 no se cumple y por tanto $\mathbb{R}^2$ no es Espacio Vectorial con las operaciones definidas.

Ejemplo 78 Sea $V = C[a,b]$, el conjunto de las funciones continuas en el intervalo $[a,b]$. En este conjunto se definen: $(x+y)(t) = x(t)+y(t)$, $(rx)(t) = rx(t)$, aquí x, y son funciones contínuas definidas en el intervalo $[a,b]$, por otra parte $r \in \mathbb{R}$. Se puede probar que con estas operaciones el conjunto $C[a,b]$ es un Espacio Vectorial.

Uno de los ejemplos más importantes se discute en la siguiente sección.

4.2 El espacio vectorial $\mathbb{R}^n$

Definimos $\mathbb{R}^n = \{(x_1,x_2,\ldots,x_n) : x_i \in \mathbb{R}\}$. A este conjunto es posible darle la estructura de Espacio Vectorial definiendo las operaciones suma y producto por un número:

$$\begin{aligned} (x_1,x_2,\ldots,x_n)+(y_1,y_2,\ldots,y_n) &= (x_1+y_1, x_2+y_2,\ldots,x_n+y_n) \\ k(x_1,x_2,\ldots,x_n) &= (kx_1,kx_2,\ldots,kx_n) \end{aligned}$$

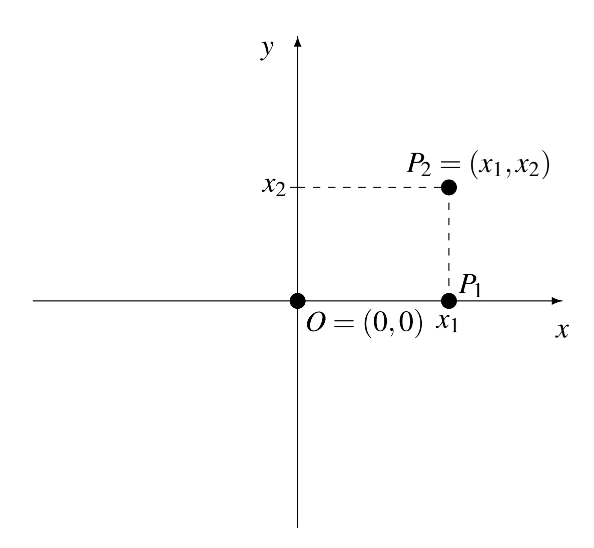
con éstas operaciones $\mathbb{R}^n$ es un espacio vectorial. Se llamará espacio vectorial $n-$dimensional.

Con el propósito de entender el significado visual de lo que es un punto y un vector en $\mathbb{R}^n$ analizemos la manera de graficar un punto y un vector en $\mathbb{R}^2$, claro está, que esta manera se puede generalizar.

Para representar un punto en el plano $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ se emplea el clásico sistema de coordenadas cartesianas que consiste en dos rectas reales que se intersectan perpendicularmente en un punto denotado con O llamado origen. Si (x_1,x_2) es un punto de $\mathbb{R}^2$ su representación geométrica se realiza siguiendo los siguientes pasos.

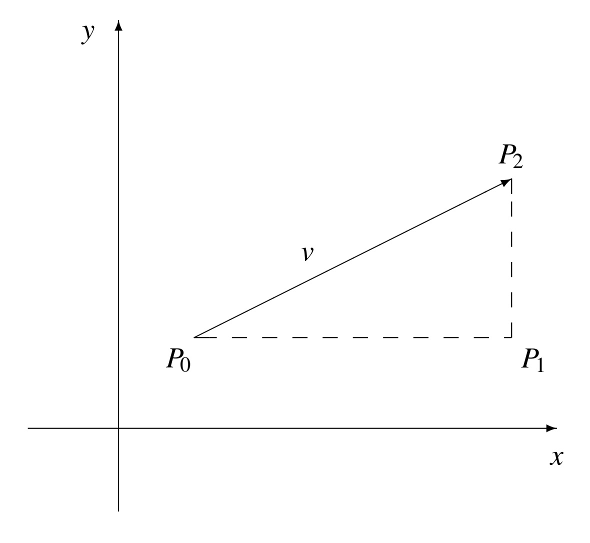
1) A partir del origen O se avanza paralelamente al eje x, la magnitud $|x_1|$ en dirección positiva o negativa dependiendo si x_1 es positivo o negativo. Así se encuentra P_1.
2) A partir del punto P_1 se avanza paralelamente al eje y, la magnitud $|x_2|$ en dirección positiva o negativa dependiendo si x_2 es positivo o negativo. Así se encuentra P_2.
3) El punto P_2 encontrado es la representación geométrica de (x_1,x_2).

En el siguiente gráfico se asume que x_1,x_2 son positivos



Sea $v = (v_1, v_2)$ un vector de $\mathbb{R}^2$. Su representación geométrica se realiza en $\mathbb{R}^2$ del siguiente modo.

1) Se elige un punto arbitrario $P_0 \in \mathbb{R}^2$, este punto se llamará punto inicial.
2) A partir de P_0 se avanza paralelamente al eje x la magnitud $|v_1|$, en dirección positiva o negativa dependiendo si v_1 es positivo o negativo, así localizamos el punto P_1.
3) A partir de P_1 se mueve paralelamente al eje y la magnitud $|v_2|$, en dirección positiva o negativa dependiendo si v_2 es positivo o negativo, así localizamos el punto P_2, este punto se llamará punto final.
4) La flecha trazada desde P_0 hasta P_2 es la representación geométrica del vector v.



Observación 1. Si se elige como punto inicial el origen, la representación geométrica del vector se llamará **radio vector**.

Observación 2. Si un vector v tiene el punto Q como punto inicial y el punto P como punto final, entonces se verifica:

$$v = P - Q.$$

Observación 3. Si un vector v tiene el origen O como punto inicial y el punto P como punto final, entonces es claro que:

$$v = P.$$

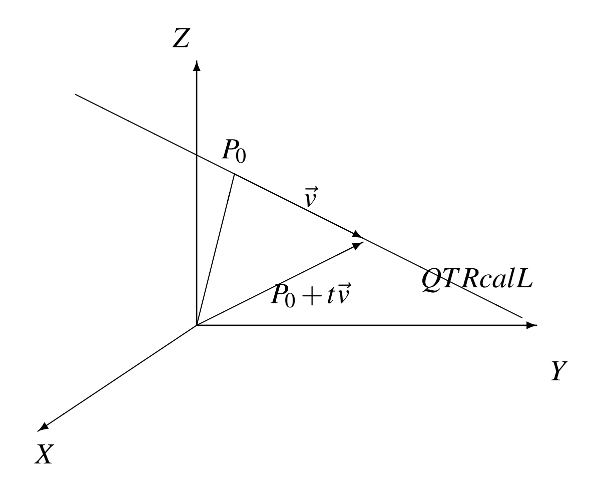
así existe una correspondencia biunívoca entre puntos y vectores.

4.2.1 La recta en $\mathbb{R}^n$

La recta en $\mathbb{R}^n$ que pasa por un punto P_0 en dirección del vector $v \neq 0$ es el subconjunto de $\mathbb{R}^n$ definido por

$$\mathscr{L} = \{P_0 + tv : t \in \mathbb{R}\},$$

aquí, el vector v se llama *vector direccional de la recta.*

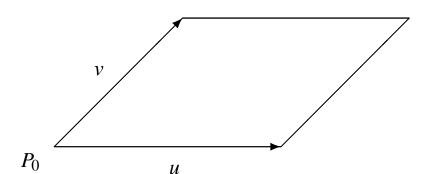


4.2.2 El plano en $\mathbb{R}^3$

Sean P_0 un punto en $\mathbb{R}^3$ y u, v vectores. Definimos el plano que pasa por P_0 generado por los vectores no nulos u y v como el conjunto

$$\mathscr{P} = \{P_0 + tu + sv : t, s \in \mathbb{R}\}.$$

Nótese que $\mathscr{P} \subset \mathbb{R}^3$.



4.3 Subespacios

Sea V un espacio vectorial, $W \subset V$. Diremos que W es un subespacio de V si W mismo es un espacio vectorial con las mismas operaciones definidas en V.

Para determinar que un subconjunto W de un espacio vectorial es o no un subespacio, no es necesario probar las ocho propiedades que caracterizan un espacio vectorial, en su lugar se tiene el siguiente teorema.

Teorema 24 Sea V un espacio vectorial, $W \subset V$ un conjunto no vacío. El conjunto W es un subespacio de V si y solamente si:

1) Para todo $u, v \in W$ se tiene $u + v \in W$.

2) Para todo $k \in \mathbb{R}$ y todo $u \in W$ se tiene $ku \in W$.

Ejemplo 79 Si V es un espacio vectorial, lo son también $W = \{0\}$ y $W = V$.

Ejemplo 80 La recta en $\mathbb{R}^3$, $\mathscr{L} = \{P_0 + tu : t \in \mathbb{R}\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$ siempre que $P_0 = 0$.

Ejemplo 81 El plano en $\mathbb{R}^3$, $\mathscr{P} = \{P_0 + tu + sv : t, s \in \mathbb{R}\}$ es un subespacio en $\mathbb{R}^3$ siempre que $P_0 = 0$

Ejemplo 82 El conjunto W de todas las soluciones de un sistema homogéneo $Ax = 0$, $A \in M_{m,n}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.

4.4 Combinación lineal

Sea $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ un subconjunto de un espacio vectorial V, sean $k_1, k_2, \ldots, k_n \in \mathbb{R}$ Cualquier vector en V escrito de la forma:

$$w = k_1 v_1 + k_2 v_2 + \cdots + k_n v_n$$

se llamará combinación lineal de los vectores del conjunto S.

4.4.1 Espacio generado

Sea V un espacio vectorial. El conjunto de todas las combinaciones lineales del conjunto $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \subset V$, se llamará espacio generado por S y se denotará con $LIN(S)$ o $\langle S \rangle$

Teorema 25 El conjunto $LIN(S)$ es un subespacio de V, más aún, es el subespacio más pequeño de V que contiene S, es decir si W es otro subespacio que contiene S, se debe tener $LIN(S) \subset W$.

Ejemplo 83 En $\mathbb{R}^3$ considere el conjunto:

$$S = \{(1,0,1), (-1,3,-3), (1,3,-1)\}$$

determinar si $v = (1,2,3) \in LIN(S)$.

Solución. Si el vector dado pertenece a $LIN(S)$, existen números k_1, k_2, k_3 tales que:

$$(1,2,3) = k_1(1,0,1) + k_2(-1,3,-3) + k_3(1,3,-1)$$

esto origina el sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

para calcular las soluciones llevamos la matriz aumentada a su forma escalonada:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & : & 1 \\ 0 & 3 & 3 & : & 2 \\ 1 & -3 & -1 & : & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[f_{31(-1)}]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & : & 1 \\ 0 & 3 & 3 & : & 2 \\ 0 & -2 & -2 & : & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[f_{32(2/3)}]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & : & 1 \\ 0 & 3 & 3 & : & 2 \\ 0 & 0 & 0 & : & \frac{10}{3} \end{pmatrix}$$

claramente el rango de la matriz de coeficientes no es igual al rango de la matriz aumentada, por tanto el sistema no tiene soluciones, es decir $(1,2,3) \notin LIN(\{(1,0,1), (-1,3,-3), (1,3,-1)\})$.

Ejemplo 84 Determinar $LIN(B)$ si:

$$B = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Solución. Sea $v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, un vector de $\mathbb{R}^3$, si este vector se encuentra en $LIN(B)$ se debe tener que el sistema

$$x_1v_1 + x_2v_2 = v$$

debe tener solución, reemplazando valores se encuentra el sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

llevando la matriz aumentada a su forma escalonada se encuentra:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & : & a \\ -1 & -1 & : & b \\ 1 & 1 & : & c \end{pmatrix} \xrightarrow[f_{21(1)}]{f_{31(-1)}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & : & a \\ 0 & 1 & : & a+b \\ 0 & -1 & : & -a+c \end{pmatrix} \xrightarrow[f_{32(1)}]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & : & a \\ 0 & 1 & : & a+b \\ 0 & 0 & : & b+c \end{pmatrix}$$

para que el sistema tenga soluciones se debe tener:

$$rango\,(\text{Matriz de coeficientes}) = rango\,(\text{Matriz aumentada}),$$

esto se da cuando $b+c=0$, así el subespacio generado por $B = \{v_1, v_2\}$ es

$$\begin{aligned} W &= \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} : b+c=0, a,b,c \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ -b \end{pmatrix} : a,b \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} : a,b \in \mathbb{R} \right\}, \text{ un plano} \end{aligned}$$

4.4.2 Dependencia lineal

En un espacio vectorial V se considera el subconjunto $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, se dice que este conjunto es **linealmente dependiente** (LD) si existen números $x_1, x_2, \ldots, x_n$, no todos nulos, tales que

$$x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_nv_n = 0.$$

Si de la igualdad $x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_nv_n = 0$ se sigue que la única solución es $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$, entonces el conjunto $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es **linealmente independiente** (LI).

Ejemplo 85 Determinar si el conjunto

$$S = \{(1,0,1), (-1,3,-3), (1,3,-1)\}$$

es **LI** o **LD**.

Solución. Considérese la igualdad:

$$x_1(1,0,1) + x_2(-1,3,-3) + x_3(1,3,-1) = (0,0,0)$$

esto origina el sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

para calcular las soluciones llevamos la matriz aumentada a su forma escalonada:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & : & 0 \\ 0 & 3 & 3 & : & 0 \\ 1 & -3 & -1 & : & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[f_{31(-1)}]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & : & 0 \\ 0 & 3 & 3 & : & 0 \\ 0 & -2 & -2 & : & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[f_{32(2/3)}]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & : & 0 \\ 0 & 3 & 3 & : & 0 \\ 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{pmatrix}$$

es claro que este sistema tiene soluciones, si $x_3 = 1$, se encuentran $x_2 = -1$ y $x_1 = -2$. Por tanto el sistema es **LD** pues existen números, no todos cero, $x_1 = -2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$ tales que:

$$x_1(1,0,1) + x_2(-1,3,-3) + x_3(1,3,-1) = (0,0,0).$$

Ejemplo 86 Determinar si el conjunto

$$S = \{(1,0,1), (-1,3,-3), (1,3,0)\}$$

es **LI** o **LD**.

Solución. Considérese la igualdad:

$$x_1(1,0,1) + x_2(-1,3,-3) + x_3(1,3,0) = (0,0,0)$$

esto origina el sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

para calcular las soluciones llevamos la matriz aumentado a su forma escalonada:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & : & 0 \\ 0 & 3 & 3 & : & 0 \\ 1 & -3 & 0 & : & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[f_{31(-1)}]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & : & 0 \\ 0 & 3 & 3 & : & 0 \\ 0 & -2 & -1 & : & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[f_{32(2/3)}]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & : & 0 \\ 0 & 3 & 3 & : & 0 \\ 0 & 0 & 1 & : & 0 \end{pmatrix}$$

claramente las soluciones son, $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, por tanto el sistema es **LI**.

Ejercicios propuestos

1) Sea $V = \{(x,y) : x,y \in \mathbb{R}\}$. Mostrar que V no es espacio vectorial con respecto a las siguientes operaciones.
   a) $(a,b) + (c,d) = (a,b)$ y $k(a,b) = (ka,kb)$
   b) $(a,b) + (c,d) = (a+c,b+d)$ y $k(a,b) = \left(k^2a,k^2b\right)$
   c) $(a,b) + (c,d) = (a+c,b+d)$ y $k(a,b) = (ka,0)$
2) Determinar si W es o no un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ donde:
   a) $W = \{(a,b,c) : c = 5a\}$. Sol. si
   b) $W = \{(a,b,c) : a < b < c\}$. Sol. no
   c) $W = \{(a,b,c) : ab = 0\}$. Sol. no
   d) $W = \{(a,b,c) : a = b = c\}$. Sol. si
   e) $W = \left\{(a,b,c) : a = b^2\right\}$. Sol. no
   f) $W = \{(a,b,c) : k_1a + k_2b + k_3c = 0\}$. Sol. si
   g) $W = \{(a,b,c) : c = a+b\}$. Sol. si

3) En $M_{n,n}$, el espacio vectorial de matrices cuadradas $n \times n$, mostrar que W es un subespacio de $M_{n,n}$ si:
   a) $W = \{A \in M_{n,n} : A^t = A\}$
   b) $W = \{A \in M_{n,n} : A \text{ es triangular superior}\}$
   c) $W = \{A \in M_{n,n} : A \text{ es diagonal}\}$
   d) $W = \{A \in M_{n,n} : A \text{ es escalar}\}$
4) En $M_{n,n}$, el espacio vectorial de matrices cuadradas $n \times n$, determinar si W es o no un subespacio de $M_{n,n}$, donde W es:
   a) el conjunto de matrices con ceros en la diagonal principal.
   b) el conjunto de todas las matrices invertibles.
   c) el conjunto de todas las matrices no invertibles.
   d) el conjunto de todas la matrices A que conmutan con una matriz fija B.
   e) el conjunto de todas la matrices A tal que $A^2 = A$.
   f) el conjunto de todas las matrices antisimétricas (las matrices A tales que $A^t = -A$).
5) Mostrar que los siguientes conjuntos son espacios vectoriales con las operaciones usuales de funciones y ternas es $\mathbf{R}^3$..
   a) El conjunto de polinomios $\mathscr{P}_n = \left\{a_0 + a_1 t + \cdots a_n t^n : a_j \in \mathbb{R}, j = 0, 1, \cdots n\right\}$
   b) El conjunto

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : 2x - 5y + 7z = 0 \text{ y } x + y + z = 0 \right\}$$

6) Mostrar que los siguientes conjuntos no son espacios vectoriales, (las operaciones son las usuales)
   a) $L_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 2 \right\}$
   b) $L_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \right\}$
   c) $L_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{2,2} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$
   d) $\mathscr{P}_2 = \left\{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 : a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}^+\right\}$
7) Considere: $u_1 = (2,1,2)$, $u_2 = (-1,1,1)$, $u_3 = (-3,0,-1)$ y $S = \{u_1, u_2, u_3\}$ con la ayuda de ***Maxima***determinar si los siguientes vectores están o no en $LIN(S)$.
   a) $(-2,2,2)$. Sol. si
   b) $(1,-2,-1)$. Sol. no
8) Escribir D como combinación lineal de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   a) $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. Sol. no se puede escribir
   b) $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Sol. $D = A - B + C$
9) En $\mathbb{R}^3$ se considera $S = \{(1,1,1), (0,1,1), (1,-1,1)\}$ mostra que $\mathbb{R}^3 = LIN(S)$.
10) En $M_{2,2}$ se considera el conjunto:

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

mostrar que $LIN(S) \neq M_{2,2}$. (ver ejercicio 8)

11) Probar que para cualesquiera vectores u,v,w, los vectores $u-v, v-w, w-u$ son LD.
12) Mostrar que cualquier conjunto que contiene el vector 0 es LD.
13) Mostrar que cualquier subconjunto de un conjunto LI. es LI.
14) Demostrar:
    a) Que 3 vectores en $\mathbb{R}^2$ son **LD.**
    b) Que $n+1$ vectores en $\mathbb{R}^n$ son **LD.**

    (Sug. Para probar la primera parte tome tres vectores y considere los casos en que dos vectores son **LD** y **LI**.).
15) Considere el espacio W generado por los vectores $(2,-1,1,2)$ y $(1,0,1,1)$. Determinar valores de a y b tales que
    a) $(a, 2a+b, 0, a-b) \in W$. Sol. $a=b=0$
    b) $(a,b,a+b,a) \in W$. Sol. $a,b \in \mathbb{R}$

4.5 Base y Dimensión

Definición 43 **(Base)** Sea V un espacio vectorial , sea $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset V$. Diremos que B es una base si:

(i) B es **LI.**

(ii) $LIN(B) = V$,

es decir, un conjunto es una base si es **linealmente independiente** y **genera todo el espacio** V.

Observación 1. Nótese que para comprobar si B es o no **LI**, se debe plantear la ecuación:

$$x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_nv_n = 0, \qquad \text{(i)}$$

el conjunto B es **LI** si la única solución es $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$.

Observación 2. Para comprobar si B genera o V ($LIN(B) = V$), se debe plantear la ecuación:

$$x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_nv_n = v, \qquad \text{(ii)}$$

donde $v \in V$ es un vector arbitrario. Si este sistema tiene soluciones entonces B genera V, es decir $LIN(B) = V$, más aún solo es necesario demostrar que $V \subset LIN(B)$, pues la otra inclusión es obvia.

Observación 3. En la práctica se parte de la ecuación (ii) pues (i) es un caso particular de (ii) con $v = 0$.

Definición 44 **(Dimensión)** La dimensión de un espacio vectorial es el número de elementos que tiene su base. Si una base de un espacio vectorial V tiene n elementos, escribiremos $\dim(V) = n$.

Ejemplo 87 Considere el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$. Determinar si el conjunto

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

es o no una base.

Solución. Sea $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ un vector arbitrario de $\mathbb{R}^2$. Considere la ecuación:

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

esto da:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

llevando la matriz aumentada a su forma escalonada se encuentra:

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & -2 & : & a \\ -1 & 1 & : & b \end{array}\right) \xrightarrow[f_{21(1)}]{} \left(\begin{array}{cccc} 1 & -2 & : & a \\ 0 & -1 & : & a+b \end{array}\right)$$

es claro que el rango de la matriz de coeficientes es igual al rango de la matriz aumentada e igual al número de incógnitas, por tanto llegamos a las siguientes conclusiones.

Dependencia lineal: Puesto que:

$$rango\,(\text{matriz de coeficientes}) = 2\ \{\text{igual al número de variables}\}$$

se sigue que el sistema homogéneo tiene como solución única a $x_1 = x_2 = 0$, por tanto el conjunto B es **LI**.

Generador: Puesto que para todo valor de a, b se tiene:

$$rango\,(\text{matriz de coeficientes}) = rango\,(\text{Matriz ampliada})$$

el sistema tiene soluciones, por tanto $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in LIN\,(B)$, esto es $\mathbb{R}^2 \subset LIN\,(B)$, de esto se sigue que $\mathbb{R}^2 = LIN\,(B)$, es decir B genera $\mathbb{R}^2$.

De lo anterior se concluye que B es una base de $\mathbb{R}^2$. Note que la dimensión de $\mathbb{R}^2$ es 2.

Ejemplo 88 Determinar si el siguiente conjunto es o no una base de $\mathbb{R}^3$.

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Solución. Sea $v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, un vector arbitrario de $\mathbb{R}^3$, resolvamos el sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

llevando la matriz aumentada a su forma escalonada se encuentra:

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & : & a \\ -1 & -1 & : & b \\ 1 & 1 & : & c \end{array}\right) \xrightarrow[f_{21(1)}]{f_{31(-1)}} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & : & a \\ 0 & 1 & : & a+b \\ 0 & -1 & : & -a+c \end{array}\right) \xrightarrow[f_{32(1)}]{} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & : & a \\ 0 & 1 & : & a+b \\ 0 & 0 & : & b+c \end{array}\right)$$

a partir de este resultado llegamos a las siguientes conclusiones:

Dependencia lineal: De la última matriz encontrada se tiene:

$$rango\,(\text{Matriz de coeficientes}) = 2\ \{\text{igual al número de variables}\}$$

se sigue que el sistema homogéneo tiene como solución única a $x_1 = x_2 = 0$, por tanto el conjunto B es **LI**.

Generador: Nótese que si $b+c \neq 0$ se tiene:

$$rango\,(\text{matriz de coeficientes}) \neq rango\,(\text{Matriz ampliada})$$

esto muestra, que en los casos $b+c \neq 0$, el sistema no tiene solución, por tanto $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ no necesariamente pertenece a $LIN\,(B)$, luego B no genera $\mathbf{R}^3$.

De lo anterior se concluye que B no puede ser una base de $\mathbb{R}^3$.

Ejemplo 89 (La base canónica de $\mathbb{R}^n$) En el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ se toman los vectores e_i que tienen la siguiente propiedad: tienen la unidad en la $i-ésima$ componente y ceros en las demás, es inmediato probar que el conjunto:

$$B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$$

forman una base de $\mathbb{R}^n$, así $\mathbb{R}^n$ tiene dimensión n. Si $n = 4$, el conjunto base (base canónica) es:

$$B = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$$

donde: $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} .e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ejercicios propuestos

1) Determinar si

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

es o no una base de $\mathbb{R}^3$.

2) Determinar la dimensión y la base de los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^4$.
   a) Los vectores de la forma $(a, b, 0, d)$. Sol. 3
   b) Los vectores de la forma $(a, b, c, d\ )$, tal que $d = a + b$, $c = a - b$. Sol. 2
   c) Los vectores de la forma $(a, b, c, d\ )$, tal que $a = b = c$. Sol. 2
3) Con la ayuda de ***Maxima*** determine una base para $\left\{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 : x_1 = 2x_3 \text{ y } x_2 = 4x_5\right\}$.
4) Encontrar un vector de la base canónica en $\mathbb{R}^3$ que se pueda agregar al conjunto

$$C = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

de manera que sea una base de $\mathbb{R}^3$. Sol. e_1 o e_2. (Sug. el vector no debe estar en $LIN(C)$).

5) Pruebe que si $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ es una base de un espacio vectorial V, entonces el conjunto $B' = \{v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_3\}$ sigue siendo una base de V. ¿que puede decir acerca del conjunto $\{v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_3 - v_1\}$?
6) Suponga que $\{v_1, v_2, v_3\}$ es linealmente independiente en V y $w \in V$. Pruebe que si

$$\{v_1 + w, v_2 + w, v_3 + w\}$$

es linealmente dependiente, entonces $w \in LIN(\{v_1, v_2, v_3\})$

7) Sea W el conjunto de todos los polinomios $P(x)$ de grado menor o igual a 3 tales que $P(1) = P'(1) = 0$, aquí $P'(x)$ es la derivada de $P(x)$. Hallar una base de W. Sol. $B = \left\{x^3 - 3x + 2, x^2 - 2x + 1\right\}$, (Otra base es $B = \left\{x(x-1)^2, (x-1)^2\right\}$)

4.6 Espacio fila, espacio columna y espacio nulo

Sea $A \in M_{m,n}$, las filas de A consideradas como vectores fila de $\mathbb{R}^n$ forman un subespacio de $\mathbb{R}^n$, llamado **espacio fila** de la matriz A. Las columnas de A consideradas como vectores columna de $\mathbb{R}^m$ forman un subespacio de $\mathbb{R}^m$, llamado **espacio columna** de la matriz A. El conjunto de soluciones del sistema homogéneo $Ax = 0$, forman un subespacio llamado el espacio nulo de A.

¿Los espacios fila y nulo, cambian con operaciones elementales de fila?

NO, las operaciones elementales no cambian estos espacios.

¿Y el espacio columna?

SI, las operaciones elementales pueden cambiar el espacio columna.

¿Cómo se encuentra una base para el espacio fila?

Para determinar una base del espacio fila de una matriz $A \in M_{m,n}$, se procede a llevar ésta matriz a su forma escalonada, los vectores no nulos forman la base del espacio fila.

¿Cómo se encuentra una base para el espacio columna?

Para determinar una base del espacio columna de una matriz $A \in M_{m,n}$, se procede a llevar esta matriz a su forma escalonada, sea j la columna donde aparece un elemento distinguido, entonces, la $j-ésima$ columna de A **(no de la matriz escalonada)** es un vector base del espacio columna.

Ejemplo 90 Determinar la base del espacio fila y columna de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución. Se lleva la matriz a la forma escalonada mediante operaciones elementales de fila.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[f_{21(-2)}]{f_{31(-1)}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[f_{32(-1)}]{} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Determinación de la base del espacio fila: Está formada por las filas no nulas de la matriz escalonada. esto es, la base es:

$$\left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{1} & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Determinación de la base del espacio columna: los elementos distinguidos en la matriz escalonada aparecen en las columnas 1 y 2, por tanto las columnas 1 y 2 de la matriz A son la base del espacio columna, es decir, la base es:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

¿Cómo determinar una base del espacio nulo?

Una base del espacio nulo de una matriz $A \in M_{m,n}$, se encuentra directamente de las soluciones que se encuentran.

Ejemplo 91 Determinar la base del espacio nulo de:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Solución. Llevando la matriz de coeficientes a su forma escalonada se encuentra:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & : & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & : & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & : & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[f_{21(-2)}]{f_{31(-1)}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & : & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & : & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & : & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[f_{32(-1)}]{} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & -1 & 0 & 1 & 0 & : & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & -2 & 1 & : & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{pmatrix}$$

las variables libres son x_3, x_4 y x_5. Sean

$$\begin{aligned} x_3 &= t \\ x_4 &= s \\ x_5 &= r \end{aligned}$$

con esto, es sistema homogéneo queda como:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & -1 & : & -s \\ 0 & \mathbf{1} & : & -t+2s-r \end{pmatrix}$$

de donde se encuentra:

$$\begin{aligned} x_1 &= -t+s-r \\ x_2 &= -t+2s-r \end{aligned}$$

así, la solución del sistema homogéneo es:

$$\begin{aligned} x &= \begin{pmatrix} -t+s-r \\ -t+2s-r \\ t \\ s \\ r \end{pmatrix} \\ &= t\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, t,s,r \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

y una base del espacio nulo:

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Ejercicios propuestos

Utilizando ***Maxima***, determinar bases para el espacio fila, columna y nulo de:

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Sol. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

2) $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Sol. $\left\{ \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

3) $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 3 \\ -2 & 5 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Sol. $\left\{ \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

5 — Espacios producto interno

En este capítulo, con el objeto de dar una estructura métrica (la posibilidad de medir) a un espacio vectorial se define el concepto de producto interno. Con este producto es posible definir el concepto de norma (medida) de un vector, más aún esto nos permite definir la ortogonalidad entre vectores de un espacio vectorial.

5.1 La definición de espacio producto interno

Sea V un espacio vectorial, considérese la función

$$\langle u,v\rangle : V\times V\to\mathbb{R},$$

es decir, a un par $u,v\in V$ se asigna un número real. La función $\langle\ ,\ \rangle$ se llama producto interno, siempre que se cumplan las siguientes propiedades: Para todo $u,v,w\in V$ y todo $k\in\mathbb{R}$.

P$_1$: $\langle u,v\rangle=\langle v,u\rangle$, **Simetría**.
P$_2$: $\langle u,v+w\rangle=\langle u,v\rangle+\langle u,w\rangle$, **Distributividad**.
P$_3$: $\langle ku,v\rangle=k\langle u,v\rangle$, **Homogeneidad.**
P$_4$: $\langle u,u\rangle\geq 0$, , **No negatividad.**
P$_5$: $\langle u,u\rangle=0$ si y solamente si $u=0$.

Un espacio vectorial en donde se define un producto interno se llama Espacio producto interno.

5.1.1 Ejemplos de productos internos

El producto interior euclidiano

En $\mathbf{R}^n$ se define

$$\langle u,v\rangle=u^tv$$

este producto así definido es un producto interno, en efecto:

P$_1$: $\langle u,v\rangle=u^tv=v^tu=\langle v,u\rangle$,
P$_2$: $\langle u,v+w\rangle=u^t(v+w)=u^tv+u^tw=\langle u,v\rangle+\langle u,w\rangle$,
P$_3$: $\langle ku,v\rangle=(ku)^tv=k(u^tv)=k\langle u,v\rangle$,
P$_4$: $\langle u,u\rangle=u^tu=u_1^2+u_2^2+\cdots+u_n^2\geq 0$, aquí $u=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\\vdots\\u_n\end{pmatrix}$

P$_5$:Si $\langle u,u\rangle=0$, entonces $u_1^2+u_2^2+\cdots+u_n^2=0$, de donde cada $u_i=0$, esto es, $u=0$, el recíproco es trivialmente cierto.

El producto interior euclidiano, se llamará también producto interno usual de $\mathbb{R}^n$, es usual emplear la notación $u\cdot v$, en lugar de $\langle u,v\rangle$.

Producto interno asociado a una matriz

Considere el producto interno euclidiano en $\mathbb{R}^n$ y $A \in M_{n,n}$ una matriz invertible, entonces el producto en $\mathbf{R}^n$ definido por:

$$\langle u, v\rangle = Au \cdot Av$$

es un producto interno en $\mathbb{R}^n$. Nótese que $\langle u, v\rangle = u^t\left(A^t A\right)v$

Ejemplo 92 Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

a esta matriz se asocia el producto interno:

$$\begin{aligned}
\left\langle \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right\rangle &= \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \\
&= 13u_1v_1 + 5u_1v_2 + 5u_2v_1 + 2u_2v_2.
\end{aligned}$$

Producto interno de funciones

Sea $C[a,b]$ el espacio de todas las funciones contínuas en $[a,b]$, este conjunto con las operaciones usuales de suma de funciones y multiplicación por escalar es un **Espacio Vectorial**. En este conjunto se define:

$$\langle x, y\rangle = \int_a^b x(t)\,y(t)\,dt$$

es fácil probar que esta función define un producto interno en $C[a,b]$.

Ejemplo 93 En $C[0,1]$, el producto interno de los vectores $x(t) = t+1$ e $y(t) = t^2$ es:

$$\left\langle t+1, t^2 \right\rangle = \int_0^1 (t+1)\,t^2 dt = \frac{7}{12}$$

5.1.2 Propiedades del producto interno

Teorema 26 Si $\langle u, v\rangle$ es un producto interno, entonces:

(i) $\langle 0, v\rangle = \langle v, 0\rangle = 0$
(ii) $\langle u, kv\rangle = k\langle u, v\rangle$ {válido sólo en caso real}
(ii) $\langle u+v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$.

5.2 La norma de un vector

Definición 45 (*norma*) Sea V un espacio producto interno, la norma (o longitud) de un vector $v \in V$ está definido por:

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$, es el producto interno definido en V.

Ejemplo 94 En el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$, con $\langle u, v\rangle = u^t v$, la norma inducida por este producto interno es:

$$\|v\| = \sqrt{v^t v} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}$$

Definición 46 (*distancia*) La distancia entre dos vectores de un espacio vectorial V está definido por:

$$d(u,v) = \|v-u\|,$$

donde $\|\cdot\|$ es la norma inducida por el producto interno definido en V.

5.3 Ortogonalidad

5.3.1 Vectores ortogonales

Definición 47 (*Vectores ortogonales*) Dos vectores u, v en un espacio vectorial producto interno se dirán ortogonales si

$$\langle u, v \rangle = 0,$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$, es el producto interno definido en V.

Ejemplo 95 En $\mathbb{R}^3$ considérese el producto interno usual, sean

$$u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} -1 \\ -10 \\ 4 \end{pmatrix}$$

nótese que w es ortogonal a u y a v. Por otra parte u y v no son ortogonales, en efecto:

$$\begin{aligned} \langle w, u \rangle &= (-1, -10, 4) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = -2 - 10 + 12 = 0 \\ \langle w, v \rangle &= (-1, -10, 4) \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 - 10 + 8 = 0 \\ \langle u, v \rangle &= (2, 1, 3) \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -4 + 1 + 6 = 3 \neq 0. \end{aligned}$$

5.3.2 Conjuntos ortogonales

Sea V un espacio vectorial producto interno, un conjunto $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset V$, es ortogonal si $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ para todo $i \neq j$.

Ejemplo 96 En $\mathbb{R}^2$ con el producto interior usual el siguiente conjunto es ortogonal

$$\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

Ejemplo 97 En $\mathbb{R}^3$ con el producto interior usual el siguiente conjunto es ortogonal

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Ejemplo 98 En $C[0, \pi]$ con el producto interno usual, el siguiente conjunto es ortogonal

$$\{1, \cos 2t, \cos 4t, \sin 2t, \sin 4t\}$$

5.3.3 Bases ortogonales y ortonormales

Sea V un espacio vectorial producto interno, un conjunto $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset V$, es ortonormal si $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ para todo $i \neq j$ y $\langle v_i, v_i \rangle = 1$ para todo i.

Ejemplo 99 En $\mathbb{R}^2$ con el producto interior usual el siguiente conjunto es ortonormal

$$\left\{ \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} \right\}$$

Ejemplo 100 En $\mathbb{R}^3$ con el producto interior usual el siguiente conjunto es ortonormal.

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right\}$$

Ejercicios propuestos

1) Definimos $C[a,b]$, como el conjunto de funciones continuas en el intervalo $[a,b]$, definimos $\langle , \rangle : C[a,b] \times C[a,b] \to \mathbb{R}$ por

$$\langle x(t), y(t) \rangle = \int_a^b x(t)\, y(t)\, dt,$$

   a) Probar que esta función es un producto interno.
   b) Mostrar que el conjunto $W = \{1, \sin nx, \cos nx : n = 1, 2, \ldots\}$ es ortogonal en $C[0, 2\pi]$.

2) En $M_{3,3}$ se define $\langle A, B \rangle = tr(B^t A)$, muestre que esta función es un producto interno.

3) En $\mathbb{R}^2$, considere el producto interno

$$\left\langle \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right\rangle = 5v_1u_1 + 2v_1u_2 + 2v_2u_1 + 4v_2u_2$$

pruebe que este producto interno está generado por la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

4) ¿Cuál es la matriz que genera el producto interno $\langle u, v \rangle = 4v_1u_1 + 16v_2u_2$?

5) ¿Para que valor de k, la siguiente función es un producto interno en $\mathbb{R}^2$?
   a) $\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\rangle = xa + kxb + ya + yb$. Sol. $k = 1$
   b) $\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\rangle = xa + xb + ya + kyb$, Sol. $k \geq 1$

6) Trazar la circunferencia unitaria ($\|u\| = 1$), en $\mathbb{R}^2$ usando el producto interior dado:
   a) $\langle u, v \rangle = \frac{1}{4}u_1v_1 + \frac{1}{16}u_2v_2$
   b) $\langle u, v \rangle = 2u_1v_1 + u_2v_2$

7) Encontrar el producto interior generado por una matriz y el producto interior euclidiano en $\mathbb{R}^2$ para que la circunferencia unitaria sea la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

8) Probar:

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right)$$

para cualquier espacio vectorial producto interno.

9) Probar:

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{4}\|u + v\|^2 - \frac{1}{4}\|u - v\|^2$$

en cualquier espacio vectorial producto interno.

10) Probar que si u y v son vectores unitarios ortogonales, entonces $\|u - v\| = \sqrt{2}$.

11) Si u y v son vectores distintos en $\mathbb{R}^n$ con la misma norma, entonces $\dfrac{\langle u, u - v \rangle}{\|u - v\|^2} = \dfrac{1}{2}$.

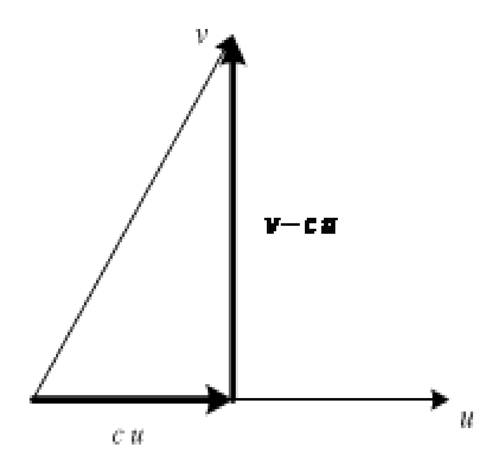
5.4 Proceso de Gram Schmidt

5.4.1 La proyección ortogonal

Motivación. Consideremos el siguiente problema:

Sean dados dos vectores u y v de algún espacio vectorial, construir un triángulo rectángulo de hipotenusa v y base paralela al vector u.

Solución. La respuesta se motiva en el siguiente gráfico:



la altura del triángulo debe ser de la forma $v - cu$, donde c es una constante. Por las condiciones del problema, debemos tener:

$$\langle v - cu, u \rangle = 0$$

de donde se obtiene:

$$c = \frac{\langle v, u \rangle}{\|u\|^2}.$$

por tanto, los lados del triángulo rectángulo son:

Base:	$\frac{\langle v, u \rangle}{\|u\|^2} u,$
Altura:	$v - \frac{\langle v, u \rangle}{\|u\|^2} u,$
Hipotenusa:	$v.$

Definición 48 **(Proyección ortogonal).** La proyección ortogonal del vector v sobre el vector u está dado por:

$$\overrightarrow{proy}_u v = \frac{\langle v, u \rangle}{\|u\|^2} u.$$

Observación. Nótese que dado el conjunto $\{u, v\}$ hemos construido el conjunto $\left\{ u, v - \frac{\langle v, u \rangle}{\|u\|^2} u \right\}$ que es ortogonal, más aún

$$LIN\{u, v\} = LIN \left\{ u, v - \frac{\langle v, u \rangle}{\|u\|^2} u \right\}$$

5.4.2 La construcción de un conjunto ortogonal de tres vectores

Si consideramos el conjunto $\{v_1, v_2, v_3\}$ es claro que si $w_1 = v_1$ y $w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1\rangle}{\|w_1\|^2} w_1$ entonces el conjunto $\{w_1, w_2\}$ es ortogonal. Definamos

$$w_3 = v_3 - cw_1 - kw_2, \quad c, k \text{ números,}$$

si exigimos que w_3 debe ser ortogonal a w_1 y w_2 debemos tener:

$$\langle w_3, w_1\rangle = 0 \text{ y } \langle w_3, w_2\rangle = 0,$$

esto lleva a:

$$\begin{aligned} \langle v_3, w_1\rangle - c\|w_1\|^2 &= 0 \\ \langle v_3, w_2\rangle - k\|w_2\|^2 &= 0 \end{aligned}$$

de donde:

$$\begin{aligned} c &= \frac{\langle v_3, w_1\rangle}{\|w_1\|^2} \\ k &= \frac{\langle v_3, w_2\rangle}{\|w_2\|^2}, \end{aligned}$$

por tanto:

$$w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, w_1\rangle}{\|w_1\|^2} w_1 - \frac{\langle v_3, w_2\rangle}{\|w_2\|^2} w_2$$

luego el conjunto $\{w_1, w_2, w_3\}$ es ortogonal. Esto puede continuarse con más vectores, originando el proceso de Gram Schmidt, que se describe en la siguiente sección.

5.4.3 El proceso de Gram Schmidt

Considere un conjunto $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ base de un espacio vectorial V. El siguiente proceso permite construir una base ortogonal.

$w_1 = v_1$

$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1\rangle}{\|w_1\|^2} w_1$

$w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, w_1\rangle}{\|w_1\|^2} w_1 - \frac{\langle v_3, w_2\rangle}{\|w_2\|^2} w_2$

en general:

$$w_i = v_i - \frac{\langle v_i, w_1\rangle}{\|w_1\|^2} w_1 - \frac{\langle v_i, w_2\rangle}{\|w_2\|^2} w_2 - \cdots - \frac{\langle v_i, w_{i-1}\rangle}{\|w_{i-1}\|^2} w_{i-1},$$

para $i = 2, 3, \ldots, n$. Es un ejercicio simple probar que el conjunto $C = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ es una base ortogonal del espacio vectorial V, más aún el conjunto

$$D = \left\{ \frac{w_1}{\|w_1\|}, \frac{w_2}{\|w_2\|}, \ldots, \frac{w_n}{\|w_n\|} \right\},$$

es una base ortonormal.

Ejemplo 101 Considere la siguiente base de $\mathbb{R}^3$

$$B = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

empleando las fórmulas anteriores, se encuentra:

Cálculo de w_1 :

$$w_1 = v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Cálculo de w_2 :
$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1,$

$\langle v_2, w_1 \rangle = (0, 1, -1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -1$, $\|w_1\|^2 = 2$, luego:

$$\begin{aligned} w_2 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \left(\frac{-1}{2}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Cálculo de w_3 :
$w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1 - \frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\|w_2\|^2} w_2$

$\langle v_3, w_1 \rangle = (0, 0, 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$, $\|w_1\|^2 = 2$

$\langle v_3, w_2 \rangle = (0, 0, 1) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}$, $\|w_2\|^2 = \frac{3}{2}$, luego

$$\begin{aligned} w_3 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

De lo anterior se deduce que

$$C = \left\{ w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \right\}$$

es una base ortogonal, la base ortonormal es

$$D = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \sqrt{3} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \right\}$$

Ejemplo 102 Considere la base en $\mathbb{R}^4$

$$B=\left\{v_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix},v_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},v_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix},v_4=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

Cálculo de w_1 :

$$w_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix},$$

Cálculo de w_2 :

$$w_2=v_2-\frac{\langle v_2,w_1\rangle}{\|w_1\|^2}w_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}-\frac{3}{3}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

Cálculo de w_3 :

$$\begin{aligned}w_3 &= v_3-\frac{\langle v_3,w_1\rangle}{\|w_1\|^2}w_1-\frac{\langle v_3,w_2\rangle}{\|w_2\|^2}w_2\\ &= \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}-\frac{-1}{1}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\0\\-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Cálculo de w_4 :

$$\begin{aligned}w_4 &= v_4-\frac{\langle v_4,w_1\rangle}{\|w_1\|^2}w_1-\frac{\langle v_4,w_2\rangle}{\|w_2\|^2}w_2-\frac{\langle v_4,w_3\rangle}{\|w_3\|^2}w_3\\ &= \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}-\frac{0}{1}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}-\frac{\frac{2}{3}}{\frac{6}{9}}\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\0\\-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

De los anterior la base ortogonal es

$$C=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\0\\-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

y la base ortonormal:

$$D=\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\frac{3}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\0\\-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

Ejercicios propuestos

1) Probar que tres vectores contruidos con el método de Gram Schmidt son efectivamente ortogonales.

Determinar la base ortogonal y ortonormal a partir de las siguientes bases:

2) $B=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right\}$

Sol. Base ortogonal:

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

3) $B=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$

Sol. Base ortogonal, debe calcular la base ortonormal.

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2/3\\1/3\\1/3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1/2\\1/2\end{pmatrix}\right\}$$

4) $B=\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right\}$

Sol. Base ortogonal, debe calcular la base ortonormal.

$$\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\\-\frac{2}{3}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\\frac{3}{2}\\0\end{pmatrix}\right\}$$

5) $B=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\7\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\7\end{pmatrix}\right\}$

Sol. Base ortogonal, debe calcular la base ortonormal.

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\7\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\\7\end{pmatrix}\right\}$$

6) En el conjunto $C[-1,1]$ considere el conjunto $\{1,x,x^2,x^3\}$, ortogonalizar este conjunto empleando el producto interno usual de $C[-1,1]$, normalize el resultado de manera que la imagen de cada polinomio $P(x)$ de este conjunto satisfaga $P(1)=1$.

Sol. $\left\{1,x,\frac{1}{2}\left(3x^2-1\right),\frac{1}{2}\left(5x^3-3x\right)\right\}$

6 — Autovalores y autovectores

En este capítulo se estudia el concepto de autovalor y autovector, se enuncian sus propiedades y teoremas relativos a este concepto. Se emplea este concepto para diagonalizar una matriz, esto tiene muchas aplicaciones en ingeniería y otras ciencias.

6.1 La definición de autovalor y autovector

Definición 49 (Autovalor y autovector) Sea $A \in M_{n,n}$. Un vector *no nulo* v y un *número* λ serán llamados *autovector* y *autovalor* **asociados** respectivamente si

$$Av = \lambda v$$

Ejemplo 103 Un autovalor y su respectivo autovector de

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$$

son $\lambda = -9$ y $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, nótese que

$$Av = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -9 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda v$$

6.2 Cálculo de autovalores y autovectores

6.2.1 Cálculo de autovalores

De la ecuación $Av = \lambda v$ se tiene el siguiente sistema homogéneo:

$$(A - \lambda I)\, v = 0 \tag{6.1}$$

donde 0 es el vector nulo en $\mathbf{R}^n$ e I la matriz identidad en $M_{n,n}$. Para el cálculo de autovalores analizamos el anterior sistema. Se tienen dos casos a discutir.

Solución única ▶ El sistema 6.1 tiene soluciones (pues es homogéneo), este sistema homogéneo tendrá solución única si y solamente si el determinante de la matriz de coeficientes es distinto de cero, es decir, $|A - \lambda I| \neq 0$, en este caso la solución es $v = 0$, esta solución no nos interesa pues un autovector, por definición, no puede ser el vector nulo.

Infinitas soluciones▶ De acuerdo a lo anterior, el sistema 6.1 tendrá infinitas soluciones si y solamente si $|A - \lambda I| = 0$, así las soluciones de $|A - \lambda I| = 0$ son los autovalores de la matriz A.

Resumimos lo anterior en el siguiente teorema.

Teorema 27 Los autovalores de una matriz A son las raíces de la ecuación

$$|A - \lambda I| = 0$$

Definición 50 (Polinomio y ecuación característica) El polinomio de grado n, $p(\lambda) = |A - \lambda I|$ se llama **polinomio característico** y la ecuación $|A - \lambda I| = 0$ se llama **ecuación característica**.

Es claro que los autovalores son las raíces del polinomio característico.

Ejemplo 104 Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$$

El polinomio característico es:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -4-\lambda & 5 \\ 5 & -4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 8\lambda - 9$$

luego la ecuación característica es:

$$\lambda^2 + 8\lambda - 9 = 0$$

cuyas raíces son:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -9 \\ \lambda_2 &= 1 \end{aligned}$$

por tanto $\lambda_1 = -9$ y $\lambda_2 = 1$ son los autovalores de A.

¿Los autovalores tienen que ser reales?

Los autovalores pueden ser números complejos, como en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 105

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculando el polinomio característico se encuentra:

$$|B - \lambda I| = \lambda^2 - 2\lambda + 17$$

luego la ecuación característica es: $\lambda^2 - 2\lambda + 17 = 0$, de donde se encuentra que los autovalores son:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1 + 4i \\ \lambda_2 &= 1 - 4i \end{aligned}$$

Maxima El polinomio caracteristico de una matrices se obtienen

```
(% i1)  A:matrix([-1,0,-1],[3,4,5],[1,0,-3])
```

(% o1) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

```
(% i2)  charpoly(A,x),factor
```

(% o2) `-(x-4)*(x+2)`^{2}

¿Es siempre fácil calcular autovalores con el polinomio característico?

No, en realidad no es un problema simple, principalmente por dos razones:

- Para calcular el polinomio característico, se debe encontrar el determinante de una matriz, el cálculo de este determinante requiere de por lo menos $n!$ productos, por ejemplo para calcular el determinante de una matriz en $M_{25,25}$ se requieren $25! = 1.55\times 10^{25}$ productos. Un supercomputador con una velocidad de cálculo $3{,}2\times 10^9$ operaciones por segundo tardaría:

$$(25!\,op)\left(\frac{1}{3{,}2\times 10^9}\frac{seg}{op}\right)\left(\frac{1hora}{3600seg}\right)\left(\frac{1dia}{24horas}\right)\left(\frac{1año}{365dias}\right)\left(\frac{1millón\,\text{años}}{10^6\text{años}}\right)=153.71$$

  millones de años.
- Aún si se hubiese calculado el polinomio característico, se deben calcular las raíces del polinomio, este problema tampoco es tan simple.

¿Existen algoritmos eficientes para calcular autovalores?

Si, en la actualidad existen poderosos métodos como los algoritmos de descomposición *LR* y *QR*, el método de la potencia, deflación. Estos se estudian en materias como **Métodos numéricos**.

¿Y entonces para que se estudia ésta parte en Álgebra Lineal?

El marco teórico que se estudia, permite comprender muchos resultados como veremos luego en las siguientes secciones.

Maxima Los valores propios y multiplicidades de una matriz A se obtiene

```
(% i1)   eigenvalues(A)
```

devuelve una lista con dos sublistas, la primera de éstas conteniendo los valores propios de la matriz A y la segunda,conteniendo sus correspondientes multiplicidades.
Ejemplo

```
(% i1)   A:matrix([-1,0,-1],[3,4,5],[1,0,-3])
```

(% o1) $\begin{bmatrix}-1 & 0 & -1\\ 3 & 4 & 5\\ 1 & 0 & -3\end{bmatrix}$

```
(% i2)   eigenvalues(A)

(% o2)   [[4,-2],[1,2]]
```

Donde el $\lambda = 4$ tiene multiplicidad 1 y el $\lambda = -2$ tiene multiplicidad 2.

6.2.2 Cálculo de autovectores

Si λ es un autovalor de $A\in M_{n,n}$, es claro que λ es solución de la ecuación característica $|A-\lambda I| = 0$. Considérese el sistema

$$(A-\lambda I)x = 0$$

este sistema homogéneo debe tener infinitas soluciones (pues $|A-\lambda I| = 0$). Como se sabe, la solución del anterior sistema homogéneo es un subespacio de $\mathbf{R}^n$; **cada vector base de este subespacio es un autovector asociado al autovalor** λ.

Ejemplo 106 Determinar los autovalores y los autovectores asociados de la matriz

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 1 & -2 & -1\\ 3 & -1 & 2\end{pmatrix}$$

Solución. El polinomio característico es

$$P(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 - 15\lambda$$

luego la ecuación característica es

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - 15\lambda = 0,$$

sus raíces son:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0 \\ \lambda_2 &= -3 \\ \lambda_3 &= 5 \end{aligned}$$

Determinamos ahora los autovectores asociados:

- $\lambda = 0$. Se resuelve el sistema $(A - 0I)x = 0$, es decir,

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Resolvemos este sistema con el algoritmo de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}_{F_{12}} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} F_{21(-2)}$$

$$F_{31(-3)} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 5 & 5 \end{pmatrix}_{F_{32(-1)}}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

la variable libre es x_3, asignando $x_3 = t$, se tiene:

$$\begin{aligned} x_2 &= -x_3 = -t \\ x_1 &= 2x_2 + x_3 = -t \end{aligned}$$

por tanto es subespacio solución asociado al autovalor $\lambda = \lambda_1 = 0$ es

$$W_{\lambda=0} = \left\{ t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbf{R} \right\}, \dim(W_{\lambda=0}) = 1$$

de este resultado concluimos que el autovector asociado a $\lambda = \lambda_1 = 0$ es $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

- $\lambda = -3$. Se resuelve el sistema $(A - (-3)I)x = 0$, es decir,

$$\begin{pmatrix} 2+3 & 1 & 3 \\ 1 & -2+3 & -1 \\ 3 & -1 & 2+3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

resolviendo:

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}_{F_{12}} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix} F_{21(-5)}$$

$$F_{31(-3)} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 8 \\ 0 & -4 & 8 \end{pmatrix}_{F_{32(-1)}}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

la variable libre es x_3. Sea $x_3 = t$, entonces:

$$\begin{aligned} x_2 &= 2x_3 = 2t \\ x_1 &= -x_2 + x_3 = -t \end{aligned}$$

por tanto el subespacio solución asociado al autovalor $\lambda = \lambda_2 = -3$ es

$$W_{\lambda=-3} = \left\{ t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbf{R} \right\}, \dim(W_{\lambda=-3}) = 1,$$

de este resultado concluimos que el autovector asociado a $\lambda = \lambda_2 = -3$ es $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

- $\lambda = 5$. Se resuelve el sistema $(A - 5I)x = 0$, es decir,

$$\begin{pmatrix} 2-5 & 1 & 3 \\ 1 & -2-5 & -1 \\ 3 & -1 & 2-5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

resolviendo:

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 \\ 1 & -7 & -1 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix}_{F_{12}} \sim \begin{pmatrix} 1 & -7 & -1 \\ -3 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix} F_{21(3)}$$

$$F_{31(-3)} \sim \begin{pmatrix} 1 & -7 & -1 \\ 0 & -20 & 0 \\ 0 & 20 & 0 \end{pmatrix}_{F_{32(1)}}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -7 & -1 \\ 0 & -20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

la variable libre es x_3. Sea $x_3 = t$, entonces:

$$\begin{aligned} x_2 &= 0 \\ x_1 &= 7x_2 + x_3 = t \end{aligned}$$

por tanto es subespacio solución asociado al autovalor $\lambda = \lambda_3 = 5$ es:

$$W_{\lambda=5} = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbf{R} \right\}, \dim(W_{\lambda=5}) = 1$$

de este resultado concluimos que el autovector asociado a $\lambda = \lambda_3 = 5$ es $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Maxima Los vectores propios de una matriz asociados a sus valores propios se obtienen con el comando

```
(% i1)  eigenvectors(A)
```

lo que nos entrega una lista con dos elementos; el primero está formado por `eigenvalues(A)`, el segundo es una lista de listas de vectores propios, una por cada valor propio, pudiendo haber uno o más vectores propios en cada lista.

Ejemplo

```
(% i1)  A:matrix([-1,0,-1],[3,4,5],[1,0,-3])
```

(% o1) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

```
(% i2)  eigenvectors(A)
```

(% o2) [[[4,-2],[1,2]],[[[0,1,0]],[[1,-$\frac{4}{3}$,1]]]]

Donde el vector [0,1,0] es el vector propio asociado al valor propio $\lambda = 4$ y el vector [1,-$\frac{4}{3}$,1] es el vector propio asociado al valor propio $\lambda = 4$.

Ejemplo 107 Calcular los autovalores y autovectores de:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Solución.

Autovalores. La ecuación característica es: $\lambda^3 - 10\lambda^2 + 32\lambda - 32 = 0$, resolviendo se encuentra:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 2, \\ \lambda_2 &= \lambda_3 = 4. \end{aligned}$$

Autovectores. Se calculan los autovectores para cada autovalor distinto,

- $\lambda = 2$. Resolvemos $(A - 2I)x = 0$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

la solución de este sistema es:

$$W_{\lambda=2} = \left\{ t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbf{R} \right\}, \dim(W_{\lambda=2}) = 1$$

- $\lambda = 4$. Se calcula la solución de $(A - 4I)x = 0$,

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

la solución es:

$$W_{\lambda=4} = \left\{ t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : t, s \in \mathbf{R} \right\}, \dim(W_{\lambda=4}) = 2$$

6.3 Teoremas relativos a autovalores y autovectores

6.3.1 Cálculo del polinomio característico

Teorema 28 Sea $A \in M_{n,n}$, entonces el polinomio característico es

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= |\lambda I - A| \\ &= \lambda^n - S_1\lambda^{n-1} + S_2\lambda^{n-2} - \cdots \pm S_{n-1}\lambda \pm S_n \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k S_k \lambda^{n-k} \end{aligned}$$

donde S_k es la suma de todos los menores principales de orden k. Definimos $S_0 = 1$. Nótese que $S_n = |A|$.

6.3.2 Autovalores y rango

Teorema 29 Sea $A \in M_{n,n}$ tal que $rango(A) < n$, entonces A tiene al menos un autovalor igual a *cero*.

Demostración. Por el teorema 28 el polinomio característico no tiene término independiente, pues $S_n = |A| = 0$, esto prueba que al menos existe un autovalor igual a *cero*.

6.3.3 Autovalores e inversa

Teorema 30 Una matriz es invertible si y solamente si todos sus autovalores son distintos de *cero*.

Teorema 31 Sea A una matriz invertible y λ un autovalor asociado al autovector v, entonces $\frac{1}{\lambda}$ es un autovalor de A^{-1} asociado a v.

Demostración. Por hipótesis $Av = \lambda v$, puesto que A es invertible $v = A^{-1}(\lambda v)$, de donde $A^{-1}v = \frac{1}{\lambda}v$, esto prueba el teorema.

6.3.4 Múltiplos escalares de un autovector

Teorema 32 Sea v un autovector de una matriz A asociado al autovalor λ, sea $k \in \mathbf{R}$, $k \neq 0$ y $w = kv$, entonces w es un autovector de A asociado a λ.

Demostración. $Aw = A(kv) = k(Av) = k(\lambda v) = \lambda(kv) = \lambda w$, esto prueba el teorema.

6.3.5 Raíz del polinomio característico

Teorema 33 Toda matriz es raíz de su polinomio característico.

Demostración. Ejercicio

Ejemplo 108 El polinomio característico de

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

es $p(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 10$, y

$$\begin{aligned} p(A) &= A^2 - 6A + 10I \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}^2 - 6\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} + 10\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

6.3.6 Autovectores y dependencia lineal

Teorema 34 Sean v_1, v_2 autovectores asociados respectivamente a λ_1 y λ_2 tales que $\lambda_1 \neq \lambda_2$, entonces el conjunto $\{v_1, v_2\}$ es linealmente independiente.

Demostración. Si el conjunto $\{v_1, v_2\}$ fuera linealmente dependiente, existen escalares c_1 y c_2 distintos de cero tal que:

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 = 0 \qquad \text{(i)}$$

multiplicando la matriz A se tiene:

$$c_1 A v_1 + c_2 A v_2 = 0,$$

empleamos ahora la hipótesis $Av_1 = \lambda_1 v_1, Av_2 = \lambda_2 v_2$, luego

$$c_1 \lambda_1 v_1 + c_2 \lambda_2 v_2 = 0, \qquad \text{(ii)}$$

de (i) multiplicando por λ_1 :

$$c_1 \lambda_1 v_1 + c_2 \lambda_1 v_2 = 0 \qquad \text{(iii)}$$

restando (iii)-(ii) se encuentra:

$$c_2 (\lambda_1 - \lambda_2) v_2 = 0$$

puesto que ni c_2 ni v_2 son nulos se debe tener: $\lambda_1 - \lambda_2 = 0$, es decir $\lambda_1 = \lambda_2$, esto es contrario a la hipótesis $\lambda_1 \neq \lambda_{2,}$ por tanto $\{v_1, v_2\}$ debe ser linealmente independiente.

6.3.7 Autovalores y autovectores de matrices simétricas

Teorema 35 Sea $A \in M_{n,n}$ simétrica, entonces sus autovalores son todos números reales.

Ejemplo 109

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Sus autovalores son $\lambda_1 = 9, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = -1$.

Teorema 36 Sea $A \in M_{n,n}$ simétrica, sean λ_1 y λ_2 autovalores de la matriz A asociados a v_1 y v_2 respectivamente. Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ entonces v_1 y v_2 son ortogonales.

Demostración.

$$\begin{aligned} \lambda_1 \left(v_1^t v_2\right) &= (\lambda_1 v_1)^t v_2 \\ &= (Av_1)^t v_2 \\ &= v_1^t A^t v_2 \\ &= v_1^t (Av_2) \\ &= v_1^t \lambda_2 v_2 \\ &= \lambda_2 \left(v_1^t v_2\right) \end{aligned}$$

por tanto $\lambda_1 (v_1^t v_2) = \lambda_2 (v_1^t v_2)$, de donde

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\left(v_1^t v_2\right) = 0,$$

puesto que $\lambda_1 \neq \lambda_2$ se debe tener $v_1^t v_2 = 0$, es decir v_1 es ortogonal a v_2.

6.3.8 Los discos de Gershgorin

Teorema 37 (Gershgorin, caso real) Sea $A \in M_{n,n}$ y

$$R_i' = \sum j = 1 \qquad j \neq i^n \left|a_{ij}\right|$$

donde $|\cdot|$ es el valor absoluto. Entonces los autovalores de A están en la union de los discos

$$\bigcup_{i=1}^{n} \{(x,y) : \|(x,y) - (a_{ii},0)\| \leq R_i'\}$$

aquí $\|\cdot\|$ es la norma euclidiana.

Ejemplo 110 Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & \frac{9}{4} & 0 \\ -5 & -\frac{7}{2} & 0 \\ -\frac{5}{2} & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Los autovalores son $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i, \lambda_3 = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$, los tres autovalores se encuentran en la unión de los discos

$$\begin{aligned} \sqrt{\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + y^2} &\leq \frac{9}{4} \\ \sqrt{\left(x + \frac{7}{2}\right)^2 + y^2} &\leq 5 \\ \sqrt{(x-5) + y^2} &\leq \frac{7}{2} \end{aligned}$$

6.4 Multiplicidad algebraica y multiplicidad geométrica

Definición 51 **(Multiplicidad algebraica)** Sea $p(\lambda)$ el polinomio característico de una matriz $A \in M_{n,n}$, y $(\lambda - a)^m$ un factor de $p(\lambda)$. En esta condiciones se dice que λ es un autovalor de A con multiplicidad algebraica igual m.

Definición 52 **(multiplicidad geométrica)** Sea λ un autovalor de $A \in M_{n,n}$, la dimensión del espacio solución del sistema $(A - \lambda I)x = 0$, es la multiplicidad geométrica.

¿Las multiplicidades algebraica y geométrica son iguales?

No, en general no son iguales, a este respecto se tiene el siguiente teorema

Teorema 38 La multiplicidad algebraica es mayor o igual que la multiplicidad geométrica.

Ejemplo 111

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Un cálculo inmediato muestra que el polinomio característico es $p(\lambda) = \lambda^3 - 13\lambda^2 + 56\lambda - 80$, cuyas raíces son los autovalores

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 5, \\ \lambda_2 &= 4, \\ \lambda_3 &= 4 \end{aligned}$$

así $\lambda = 5$ tiene multiplicidad algebraica 1, y $\lambda = 4$ tiene multiplicidad algebraica 2. A la luz del teorema la multiplicidad geométrica de $\lambda = 5$ debe ser 1 y la multiplicidad geométrica de $\lambda = 4$ debe ser menor o igual a 2. ¿Puede justificar esta afirmación?. Para calcular las multiplicidades geométricas procedemos como sigue:

$\lambda = 5$: Se resuelve el sistema: $(A-5I)x = 0$, es decir:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

resolviendo, se encuentra que la solución es

$$W_{\lambda=5} = \left\{ t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbf{R} \right\},$$

de donde se sigue que la multiplicidad geométrica de $\lambda = 5$ es 1.

$\lambda = 4$: Se debe resolver el sistema $(A-4I)x = 0$, es decir resolver el sistema:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

resolviendo se encuentra que la solución es:

$$W_{\lambda=4} = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbf{R} \right\}$$

cuya dimensión es 1, luego la multiplicidad geométrica de $\lambda = 4$ es 1. Resumimos esto en la siguiente tabla:

λ	W_λ	Mult. algebraica	Mult. Geométrica
5	$\left\{ t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbf{R} \right\}$	1	1
4	$\left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbf{R} \right\}$	2	1

Ejemplo 112 En el ejemplo 106 (página 109) se calculan los siguientes resultados sobre la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ecuación característica: $\lambda^3 - 2\lambda^2 - 15\lambda = 0$

Autovalores, autovectores y multiplicidad

λ	W_λ	Mult. algebraica	Mul. Geométrica
0	$\left\{ t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbf{R} \right\}$	1	1
-3	$\left\{ t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbf{R} \right\}$	1	1
5	$\left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbf{R} \right\}$	1	1

Ejemplo 113 En el ejemplo 107 página 112 se calculan los siguientes resultados sobre la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Ecuación característica: $\lambda^3 - 10\lambda^2 + 32\lambda - 32 = 0$

Autovalores, autovectores y multiplicidad

λ	W_λ	Mult. algebraica	Mult. Geométrica
2	$\left\{ t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbf{R} \right\}$	1	1
4	$\left\{ t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : t, s \in \mathbf{R} \right\}$	2	2

6.5 Semejanza y diagonalización

6.5.1 Matrices semejantes

Definición 53 Se dice que dos matrices $A, B \in M_{n,n}$ son semejantes si existe una matriz $P \in M_{n,n}$ invertible tal que

$$B = P^{-1}AP$$

Dos matrices semejantes tienen la propiedad de tener los mismos autovalores, esto es lo que dice el siguiente teorema.

Teorema 39 Sean $A, B \in M_{n,n}$ matrices semejantes, entonces A y B tienen los mismos autovalores.

Demostración. Existe $P \in M_{n,n}$ tal que $B = P^{-1}AP$. Sea λ un autovalor de A asociado a v, es decir, $Av = \lambda v$. Definamos $w = P^{-1}v$, entonces

$$\begin{aligned} Bw &= \left(P^{-1}AP\right) w \\ &= \left(P^{-1}AP\right)\left(P^{-1}v\right) \\ &= P^{-1}(Av) \\ &= P^{-1}(\lambda v) \\ &= \lambda\left(P^{-1}v\right) \\ &= \lambda w \end{aligned}$$

por tanto λ es un autovalor de B. Esto prueba el teorema.

■

Ejemplo 114 Considérense las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},$$

y

$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 21 & 40 \\ -15 & -29 \end{pmatrix}$$

un cálculo inmediato muestra que los autovalores de A y B son: 1 y -9.

6.5.2 Diagonalización

Sea $A \in M_{n,n}$, se dice que A es diagonalizable si existe una matriz invertible P tal que

$$P^{-1}AP = D,$$

donde D es una matriz diagonal, esto es, $D = diag\,(d_1, d_2, \ldots, d_n)$.

El producto de una matriz arbitraria por una matriz diagonal

Para comprender de mejor manera el resultado de la siguiente sección, nótese que el producto de una matriz arbitraria y una matriz diagonal resulta ser la matriz cuya $j - ésima$ columna es un múltiplo de la $j - ésima$ columna de la matriz P.

Ejemplo 115

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11}d_1 & p_{12}d_2 & p_{13}d_3 \\ p_{21}d_1 & p_{22}d_2 & p_{23}d_3 \\ p_{31}d_1 & p_{32}d_2 & p_{33}d_3 \end{pmatrix}$$

en general si $P = [P_1, P_2, \ldots, P_n]$ (P_i la i-ésima columna de P) y $D = diag\,(d_1, d_2, \ldots, d_n)$, entonces:

$$PD = [d_1P_1, d_2P_2, \ldots, d_nP_n].$$

Condición necesaria y suficiente para la diagonalización de matrices

Sea $A \in M_{n,n}$ una matriz tal que:

$$P^{-1}AP = D,$$

entonces:

$$AP = PD.$$

Sea $P = \left[P^1, P^1, \ldots, P^n\right]$, entonces de la igualdad $AP = PD$ y los resultados de productos de matrices, se deduce:

$$\left[AP^1, AP^2, \ldots, AP^n\right] = \left[d_1P^1, d_2P^2, \ldots, d_nP^n\right],$$

de donde:

$$AP^i = d_iP^i, \ i = 1, 2, \ldots, n,$$

esto prueba que la $i - ésima$ columna de P es el autovector asociado al autovalor d_i que a su vez es la entrada (i,i) de la matriz diagonal D, más aún, al ser P invertible las columnas de A deben ser linealmente independientes. Estas observaciones permiten probar el siguiente teorema.

Teorema 40 Sea $A \in M_{n,n}$. A es diagonalizable si y solamente si es posible encontrar una base de n autovectores linealmente independientes.

En términos de la multiplicidad algebraica y multiplicidad geométrica, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 41 Sea $A \in M_{n,n}$. A es diagonalizable si y solamente si cada autovalor tiene multiplicidad algebraica y multiplicidad geométrica iguales.

Ejemplo 116 Considere la matriz A del ejemplo 111 página 115,

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

se ha establecido el siguiente resultado

λ	W_λ	Mult. algebraica	Mult. Geométrica
5	$\left\{ t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbf{R} \right\}$	1	1
4	$\left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbf{R} \right\}$	2	1

al ser el autovalor $\lambda = 4$ de multiplicidad algebraica distinta a la multiplicidad geométrica, la matriz A no es diagonalizable.

Ejemplo 117 Considere la matriz A del ejemplo 112 página 116,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Se ha establecido el siguiente resultado:

λ	W_λ	Mult. algebraica	Mul. Geométrica
0	$\left\{ t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbf{R} \right\}$	1	1
-3	$\left\{ t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbf{R} \right\}$	1	1
5	$\left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbf{R} \right\}$	1	1

luego las multiplicidades algebraica y geométrica de todos los autovalores son iguales, por tanto A es diagonalizable, mas aún la matriz P que permite la diagonalización está formada con los autovectores, así:

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

y la matriz D con los correspondientes autovalores:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix},$$

nótese que $P^{-1}AP = D$.

Ejemplo 118 Considere la matriz B del ejemplo 113 página 117,

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

se ha establecido el siguiente resultado:

λ	W_λ	Mult. algebraica	Mult. Geométrica
2	$\left\{ t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbf{R} \right\}$	1	1
4	$\left\{ t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : t, s \in \mathbf{R} \right\}$	2	2

lo anterior muestra que B es diagonalizable y

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

nuevamente $P^{-1}BP = D$.

Diagonalización ortogonal

Recordemos que una matriz P es ortogonal si $P^{-1} = P^t$.

Definición 54 Una matriz A es diagonalizable ortogonalmente, si existe una matriz ortogonal P tal que:

$$P^tAP = D.$$

Observemos que si $P^tAP = D$, entonces:

$$A = PDP^t$$

aplicando transpuesta se encuentra:

$$\begin{aligned} A^t &= \left(PDP^t\right)^t \\ &= \left(P^t\right)^t DP^t \\ &= PDP^t \\ &= A, \end{aligned}$$

así la matriz A debe ser simétrica. Por tanto las únicas matrices diagonalizables ortogonalmente son las simétricas.

Ejemplo 119 Diagonalizar la siguiente matriz ortogonalmente.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución.
Ecuación característica: $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 9\lambda - 4 = 0$,
Autovalores y autovectores:

$\lambda = \lambda_1 = 4$; autovector asociado: $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$\lambda = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$; autovectores asociados, $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Nótese que el conjunto $\{v_1, v_2, v_3\}$ es un conjunto **LI**. Para generar un conjunto ortogonal emplearemos el clásico algoritmo de ortogonalización de Gram Schmidt.

- Sea $w_1 = v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,
-

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1$$

$\langle v_2, w_1 \rangle = v_2^t w_1 = (-1, 0, 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$, $\|w_1\|^2 = \langle w_1, w_1 \rangle = 3$, por tanto:

$$w_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{0}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

-

$$w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1 - \frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\|w_2\|^2} w_2$$

$\langle v_3, w_1 \rangle = v_3^t w_1 = (-1, 1, 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$, $\|w_1\|^2 = 3$

$\langle v_3, w_2 \rangle = v_3^t w_2 = (-1, 1, 0) \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$, $\|w_2\|^2 = 2$, por tanto:

$$w_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{0}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

es claro que el conjunto $\left\{ \frac{w_1}{\|w_1\|}, \frac{w_2}{\|w_2\|}, \frac{w_3}{\|w_3\|} \right\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{2}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\}$
es un conjunto ortonormal, más aún son autovectores, así la matriz P cuyas columnas son los vectores del anterior conjunto, diagonalizan ortogonalmente la matriz A, así:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

nótese que

$$\begin{aligned} P^t A P &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = D. \end{aligned}$$

Ejercicios propuestos

En los siguientes problemas,con la ayuda de ***Maxima*** calcular (a) Autovalores, (b) autovectores, (c) multiplicidad algebraica y multiplicidad geométrica, (d) diagonalizar (si es posible) la matriz dada.

1) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 8 \\ 20 & 18 & -8 \\ -60 & 6 & 44 \end{pmatrix}$, Sol. 20, 22 (b) $\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, Sol. (a) $1,3$ (b) $\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, Sol. (a) $0,4,2$ (b) $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

4) $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 7 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, Sol. (a) $0,-6,9$ (b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

5) $A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -2 \\ -5 & 3 & -2 \\ 7 & -1 & 6 \end{pmatrix}$, Sol. (a) $1,4,0$ (b) $\begin{pmatrix} 8 \\ 11 \\ -9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

6) $B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ -4 & 10 & 2 \\ 12 & -18 & -2 \end{pmatrix}$, Sol. (a) $4,2,2$ (b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$

7) $C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ -4 & -4 & -1 \end{pmatrix}$, Sol. (a) $1,3$ (b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

8) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, Sol. (a) $-1,2$ (b) $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

9) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -5 \\ 3 & 5 & -15 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix}$, Sol. (a) $-1,1$ (b) $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

10) $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, Sol. (a) $2,-1,5$ (b) $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

11) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, Sol. (a) $0,-2$ (b) $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

12) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, Sol. (a) $0,2,-5,-7$ (b) $\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

13) $A = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{pmatrix}$, Sol. (a) $(a+b)^2, (a-b)^2, \left(a^2-b^2\right)$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Diagonalizar ortogonalmente las siguiente matrices:

14) $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$, Sol. $P=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&0&\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$

15) $A=\begin{pmatrix}2&1&-1\\1&0&1\\-1&1&2\end{pmatrix}$, Sol. $P=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&0&-\frac{2}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$

16) $A=\begin{pmatrix}2&4&0\\4&2&3\\0&3&2\end{pmatrix}$, Sol. $P=\begin{pmatrix}\frac{2}{5}\sqrt{2}&\frac{2}{5}\sqrt{2}&\frac{3}{5}\\-\frac{1}{2}\sqrt{2}&\frac{1}{2}\sqrt{2}&0\\\frac{3}{10}\sqrt{2}&\frac{3}{10}\sqrt{2}&-\frac{4}{5}\end{pmatrix}$

Mostrar que existe una matriz ortogonal P formada por autovectores tales que P^tAP es una matriz triangular superior.

17) $A=\begin{pmatrix}5&-3&3\\6&-4&3\\6&-3&2\end{pmatrix}$, Sol. $P=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&0&-\frac{2}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$

18) ¿Para que valores de k la siguiente matriz es diagonalizable?

$$A=\begin{pmatrix}1-k&-k&-k\\k&k+1&k-1\\0&0&2\end{pmatrix}$$

Sol. Autovalores $2,1$. Sólo es diagonalizable para $k=0$.

19) Sea A una matriz idempotente ($A^2=A$), probar que sus autovalores son $\lambda=0$ y $\lambda=1$.

20) Sea A una matriz ortogonal ($A^{-1}=A^t$), probar que sus autovalores son $\lambda=1$ y $\lambda=-1$.

21) Sean $A,B\in M_{n,n}$. Si A es invertible, demostrar que AB y BA son semejantes y por tanto tienen los mismos autovalores.

22) Calcular la m - ésima potencia de:

$$A=\begin{pmatrix}3&2&2\\2&3&2\\2&2&3\end{pmatrix}$$

Sol. $\begin{pmatrix}\frac{2}{3}+\frac{1}{3}7^m&-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}7^m&-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}7^m\\-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}7^m&\frac{2}{3}+\frac{1}{3}7^m&-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}7^m\\-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}7^m&-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}7^m&\frac{2}{3}+\frac{1}{3}7^m\end{pmatrix}$

23) Determinar los autovalores de:

$$\begin{pmatrix}a^2&ab&b^2\\ab&a^2&ab\\b^2&ab&a^2\end{pmatrix}$$

24) Determinar los valores a para los cuales la siguiente matriz es diagonalizable, calcule la matriz P que diagonaliza esta matriz:

$$A=\begin{pmatrix}-a&-a&-a\\a&a&2a\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

25) Supóngase $A\in M_{n,n}$, $I\in M_{n,n}$ la matriz identidad y c,d números.

a) Pruebe que si λ es un autovalor de una matriz A asociado al autovector v, entonces v es un autovector de la matriz $cA+dI$ asociado al autovalor $c\lambda+d$

b) Pruebe que si A es diagonalizable entonces lo es también $cA+dI$.

26) Muestre que si λ es un autovalor de A, entonces λ^k es un autovalor de A^k.

27) Pruebe que si la matriz $A \in M_{n,n}$ verifica que $A^p = 0$, entonces el único autovalor que puede tener es $\lambda = 0$.

28) Explique porque la siguiente matriz $A \in M_{n,n}$ no puede tener autovalores nulos .

$$A = \begin{pmatrix} n & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & n & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & n & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

29) Hallar los autovalores y multiplicidades de:

a)

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \\ b & a & c \end{pmatrix}$$

donde $a > b$, $a > c$. Sol: $a+c+b, \pm\sqrt{(a-c)(a-b)}$

b)

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & c \\ c & b & a \end{pmatrix}$$

Sol. $a+b+c$, $a-b$, $a-c$.

c)

$$\begin{pmatrix} a^2 & 2ab & b^2 \\ 2ab & a^2 & b^2 \\ b^2 & 2ab & a^2 \end{pmatrix}$$

Sol.: $(a+b)^2, a^2-2ab, a^2-b^2$

7 — Transformaciones lineales

Muchos problemas prácticos planteados en un espacio vectorial pueden convertirse en problemas más simples en otro espacio vectorial, para realizar esto, es necesaria una adecuada función entre esos dos espacios vectoriales, tal función se llama **Transformación lineal**, en éste capítulo estudiamos el marco teórico de estas funciones.

7.1 Introducción

7.1.1 La definición de transformación lineal

Considere una función $T : U \to V$, donde U y V son espacios vectoriales. T es una transformación lineal si:

(i) Para todo $u, w \in U$, $T(u+w) = T(u) + T(w)$

(ii) Para todo $u \in U$ y todo $k \in \mathbf{R}$, $T(ku) = kT(u)$

Nótese que una transformación lineal preserva las operaciones básicas de un espacio vectorial, es decir, preserva la suma y producto por escalar.

Ejemplo 120 La función $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$, definida por

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+y \\ y+3z \end{pmatrix}$$

T es transformación lineal, en efecto: Sean $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, entonces:

$$\begin{aligned} T(u+w) &= T\begin{pmatrix} x+a \\ y+b \\ z+c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2(x+a)+(y+b) \\ (y+b)+3(z+c) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2x+y \\ y+3z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2a+b \\ b+3c \end{pmatrix} \\ &= T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \\ &= T(u) + T(w). \end{aligned}$$

por otra parte si $k \in \mathbf{R}$, entonces:

$$\begin{aligned} T(ku) &= T\begin{pmatrix} kx \\ ky \\ kz \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2kx+ky \\ ky+3kz \end{pmatrix} \\ &= k\begin{pmatrix} 2x+y \\ y+3z \end{pmatrix} \\ &= kT\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= kT(u). \end{aligned}$$

Ejemplo 121 Sea $A \in M_{m,n}$, definimos la transformación $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ por

$$T(x) = Ax$$

las propiedades matriciales permiten probar que T es una transformación lineal.

7.1.2 Propiedades de una transformación lineal

Teorema 42 Si T es una transformación lineal, entonces
1) $T(0) = 0$.
2) $T(u-v) = T(u) - T(v)$
3) $T(-u) = -T(u)$

La primera propiedad muestra (en su forma contrapositiva) que si $T(0) \neq 0$, entonces T no puede ser transformación lineal.

Ejemplo 122 Sea $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ definida por

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+3y+5 \\ x+y \\ x+2y-1 \end{pmatrix}$$

obsérvese que $T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, por tanto T no es transformación lineal.

Observación. Nótese que $T(0) = 0$, no es garantía de que T sea transformación lineal.

Ejemplo 123 Sea $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy \\ x \\ x+y \end{pmatrix}$$

se puede probar que T no es transformación lineal ¡pruébelo!.

Ejercicios propuestos

1) Demostrar el teorema 42.
2) Determinar si las siguientes funciones son o no transformaciones lineales
   a) $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$, $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x-y+2z \\ x+z \end{pmatrix}$ Sol. Si

b) $T:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$, $T\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x\\ y+2\end{pmatrix}$ Sol. No

c) $T:\mathbf{R}^3\to\mathbf{M}_{2,2}$, $T\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x+y & x-z\\ y & 2z\end{pmatrix}$ Sol. Si.

d) $T:\mathbf{M}_{2,2}\to\mathbf{R}^2$, $T\begin{pmatrix} x & y\\ z & w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2x-3w\\ 3z-4y\end{pmatrix}$ Sol. Si

e) $T:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^3$, $T\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} xy\\ x\\ x+y\end{pmatrix}$ Sol. No

f) $T:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$, $T\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} |x|\\ 0\end{pmatrix}$, Sol. No

3) Se define $T:M_{n,n}\to M_{n,n}$ por $T(x)=xM+Mx$, donde M es una matriz cualquiera de V, mostrar que T es una transformación lineal.

7.2 Construcción de transformaciones lineales

Considere un espacio vectorial V, sea $B=\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}$ una base de V. Sea T una transformación lineal de V en un espacio vectorial W. Si $v\in V$, entonces

$$v=c_1e_1+c_2e_2+\cdots+c_ne_n,$$

aplicando la transformación lineal se encuentra:

$$T(v)=c_1T(e_1)+c_2T(e_2)+\cdots+c_nT(e_n)$$

lo anterior muestra que la transformación T está completamente determinada por las imágenes de los vectores básicos. Lo anterior permite construir transformaciones lineales.

Ejemplo 124 Considere los espacios vectoriales $\mathbf{R}^3$ y $\mathbf{R}^2$, sea

$$B=\left\{v_1=\begin{pmatrix} 1\\ -1\\ 1\end{pmatrix},v_2=\begin{pmatrix} -1\\ 0\\ 1\end{pmatrix},v_3=\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\right\}$$

una base de $\mathbf{R}^3$. Sea T una transformación lineal tal que

$$T\begin{pmatrix} 1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\\ -1\end{pmatrix},T\begin{pmatrix} -1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\\ -1\end{pmatrix},T\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\\ 1\end{pmatrix}. \qquad \text{(i)}$$

Determinar la transformación lineal.

Solución. Sea $v=\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}$, existen números c_1,c_2,c_3 tal que

$$v=c_1v_1+c_2v_2+c_3v_3, \qquad \text{(ii)}$$

esto origina el sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1\\ c_2\\ c_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}$$

resolviendo se encuentra:

$$\begin{aligned} c_1 &= -yiii \\ c_2 &= -x-y \\ c_3 &= x+2y+z \end{aligned} \tag{7.1}$$

empleando la transformación T a la ecuación (ii) se encuentra:

$$T(v) = c_1 T(v_1) + c_2 T(v_2) + c_3 T(v_3)$$

reemplazando (i), (iii) y v en la anterior ecuación se encuentra:

$$\begin{aligned} T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= -y\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + (-x-y)\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + (x+2y+z)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -x-y+z \\ 2x+4y+z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ejercicios propuestos

1) Sea $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ una transformación lineal tal que

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2, T\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -2$$

determinar $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Sol. $6x-4y$

2) Sea $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ una transformación lineal tal que :

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, T\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Determinar $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Sol. $\begin{pmatrix} y \\ -x+y \\ -6x+5y \end{pmatrix}$

3) Determinar si existe o no una transformación lineal $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ tal que

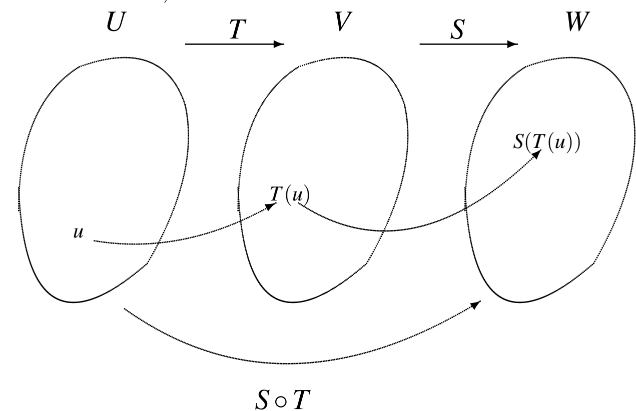
$$T\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, T\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

explicar.

4) Sea $T : U \to V$ una transformación lineal. Sea $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ un conjunto en U tal que $C = \{T(u_1), T(u_2), \cdots, T(u_n)\}$ es *L.I.*, Mostrar que B es *L.I.*

7.3 Composición

Sean $T : U \to V$, $S : V \to W$ transformaciones lineales como se muestra en la figura.



La compuesta de T y S, escrito $S \circ T$, es la función de U en W definida por:

$$(S \circ T)(u) = S(T(u)),$$

es evidente que $S \circ T$ es una transformación lineal.

Ejemplo 125 Determinar $S \circ T$ si:

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-2y \\ -2x+y \\ 2x+2y \end{pmatrix}, \quad S\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u-2v \\ v+w \end{pmatrix}$$

Solución.

$$\begin{aligned} (S \circ T)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= S\left(T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) \\ &= S\begin{pmatrix} x-2y \\ -2x+y \\ 2x+2y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x-2y-2(-2x+y) \\ -2x+y+2x+2y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5x-4y \\ 3y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

7.4 Núcleo e imagen

7.4.1 Núcleo

Sea $T : U \to V$, una transformación lineal, definimos el núcleo de T como:
$Nul(T) = \{u \in U : T(u) = 0\}$

Teorema 43 El núcleo de una transformación lineal $T : U \to V$ es un subespacio de U.

Demostración. Sean $u, w \in Nul(T)$, entonces $T(u) = 0$ y $T(w) = 0$, de donde

$$T(u+w) = T(u) + T(w) = 0 + 0 = 0$$

luego $u + w \in Nul(T)$. Por otra parte si $k \in \mathbf{R}$, entonces

$$T(ku) = kT(u) = k0 = 0,$$

de donde se deduce que $ku \in Nul(T)$. De lo anterior se sigue que $Nul(T)$ es un subespacio de U.

Definición 55 (**Nulidad**) La nulidad de una transformación lineal $T : U \to V$, denotado por $nulidad(T)$, es la dimensión del núcleo de T, es decir: $nulidad(T) = \dim(Nul(T))$

7.4.2 Imagen

Sea $T : U \to V$, una transformación lineal, definimos la imagen de T como: $Im(T) = \{T(u) : u \in U\}$ o alternativamente como: $Im(T) = \{v \in V : \text{existe } u \in U \text{ tal que } T(u) = v\}$

Teorema 44 La imagen de una transformación lineal $T : U \to V$ es un subespacio de V.

Demostración. Sean $v_1, v_2 \in funcIm(T)$, luego existen vectores $u_1, u_2 \in U$ tales que $T(u_1) = v_1$ y $T(u_2) = v_2$, entonces:

$$T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2) = v_1 + v_2,$$

esto prueba que $v_1 + v_2 \in Im(T)$.

Por otra parte si $k \in \mathbf{R}$ y $v \in Im(T)$, probaremos que $kv \in Im(T)$. Para empezar existe $u \in U$ tal que $T(u) = v$, entonces:

$$kv = kT(u) = T(ku),$$

esto prueba que $kv \in Im(T)$.

Definición 56 (**rango**) El rango de una transformación lineal $T : U \to V$, denotado por $rango(T)$, es la dimensión de la imagen T, es decir: $Rg(T) = \dim(funcIm(T))$

7.4.3 El teorema de la dimensión

Teorema 45 Sea $T : U \to V$ una transformación lineal, sea $n = \dim(U)$, entonces: $nulidad(T) + rango(T) = n$.

Ejemplo 126 Determinar el núcleo, la imagen y sus dimensiones de la transformación $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ definida por:

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ x+2y \\ x+y \end{pmatrix}$$

Solución.
Cálculo de la nulidad

$$\begin{aligned} funcNu(T) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} x-y \\ x+2y \\ x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

lo anterior origina el sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

resolviendo se encuentra que la única solución es:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

por tanto

$$Nul(T) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \right\}$$

luego $nulidad\,(T)=0$

Cálculo de la imagen

$Im\,(T)=\left\{\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix}: T\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix} \text{ para algún } \begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}\right\}$ es decir se debe tener:

$$\begin{pmatrix} x-y\\ x+2y\\ x+y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix}$$

esto origina el sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1\\ 1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix}$$

llevando la matriz aumentada a la forma escalonada se encuentra:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & a\\ 1 & 2 & b\\ 1 & 1 & c\end{pmatrix} F_{21(-1)}F_{31(-1)} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & : & a\\ 0 & 3 & : & -a+b\\ 0 & 2 & : & -a+c\end{pmatrix}_{F_{32\left(-\frac{2}{3}\right)}} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & : & a\\ 0 & 3 & : & -a+b\\ 0 & 0 & : & -\frac{1}{3}a+c-\frac{2}{3}b\end{pmatrix}$$

lo anterior muestra que el sistema tiene solución si y solamente si $-\frac{1}{3}a+c-\frac{2}{3}b=0$, por tanto:

$$\begin{aligned} Im\,(T) &= \left\{\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix}: -\frac{1}{3}a+c-\frac{2}{3}b=0;\ a,b,c\in\mathbf{R}\right\}\\ &= \left\{\begin{pmatrix} a\\ b\\ \frac{1}{3}a+\frac{2}{3}b\end{pmatrix}: a,b\in\mathbf{R}\right\}\\ &= \left\{a\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix} 0\\ 1\\ \frac{2}{3}\end{pmatrix}: a,b\in\mathbf{R}\right\}\end{aligned}$$

de donde se deduce que $rango\,(T)=2$.

Nótese que $nulidad\,(T)+funcrango\,(T)=0+2=2=\dim\left(\mathbf{R}^2\right)$.

Ejemplo 127 Determinar el núcleo, la imagen y sus dimensiones de la transformación $T:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^2$ definida por:

$$T\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2x-y+6z\\ -2x-2y+6z\end{pmatrix}$$

Solución.

Cálculo del núcleo

Se resuelve el sistema

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 6\\ -2 & -2 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\ 0\end{pmatrix}$$

La solución de éste sistema es

$$\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix} -1\\ 4\\ 1\end{pmatrix},\ t\in\mathbf{R}$$

por tanto: $Nul(T) = \left\{ t \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbf{R} \right\}$, puesto que $Nul(T)$ es generado por un sólo vector, $nulidad(T) = 1$.

Cálculo de la imagen.

Sea $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in Im(T)$, entonces:

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y + 6z \\ -2x - 2y + 6z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

así, se plantea el sistema:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 6 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

llevando la matriz aumentada a la forma escalonada se encuentra:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 6 & : & a \\ -2 & -2 & 6 & : & b \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 6 & : & a \\ 0 & -3 & 12 & : & a+b \end{pmatrix}$$

lo anterior muestra que éste sistema siempre tiene soluciones, es decir, cualquier $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in Im(T)$, por tanto $Im(T) = \mathbf{R}^2$ y $rango(T) = 2$.

Nuevamente el teorema de la dimensión se cumple: $nulidad(T) + rango(T) = 1 + 2 = 3 = \dim\left(\mathbf{R}^3\right)$.

Ejercicios propuestos

1) En los siguientes problemas, determinar una base y la dimensión de (i) núcleo (ii) la imagen de T.

   a) Sea $T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y + 2z \\ -4x - 2y + 13z \\ 2x - 3z \end{pmatrix}$

   Sol. $Nul(T) = \left\{ t \begin{pmatrix} 3/2 \\ 7/2 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbf{R} \right\}, Im(T) = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ \frac{2}{3}a - \frac{1}{3}b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbf{R} \right\}$

   b) Sea $T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y - z \\ y + z \\ x + y - 2z \end{pmatrix}$

   Sol. $Nul(T) = \left\{ t \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbf{R} \right\}, Im(T) = \left\{ a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} : a, b \in \mathbf{R} \right\}$

2) Sea $T : M_{2,2} \to M_{2,2}$ y $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, sea $T(A) = AM - MA$ determinar una base y la dimensión del núcleo de T. Sol. $\left\{ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

3) Sea $T : M_{2,2} \to M_{2,2}$ y $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, sea $T(A) = MA$, determinar el núcleo de T

7.5 La transformación inversa

Definición 57 (**Transformación 1-1**) Sea $T : U \to V$, una transformación lineal. Se dice que T es uno a uno $(1-1)$ si para elementos u_1, u_2 distintos de U, se encuentra que $T(u_1) \neq T(u_2)$.

Una definición alternativa es: Se dice que T es uno a uno si $T(u_1) = T(u_2)$ implica $u_1 = u_2$.

Teorema 46 Sea $T : U \to V$, una transformación lineal. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.

1) T es uno a uno.
2) $Nul(T) = \{0\}$.
3) $nulidad(T) = 0$.

Ejemplo 128 Determinar si la siguiente transformación es o no uno a uno.

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y \\ x-y \\ 2x-y \end{pmatrix}$$

el núcleo de T se encuentra resolviendo:

$$\begin{aligned} x+2y &= 0 \\ x-y &= 0 \\ 2x-y &= 0 \end{aligned}$$

se encuentra que la única solución es: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, por tanto

$$Nul(T) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$

de donde se deduce que T es una transformación lineal **uno a uno**.

Ejemplo 129 ¿Bajo qué circunstancias la transformación $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, definida por $T(x) = Ax$, es uno a uno?, aquí $A \in M_{m,n}$.

Solución. Sean $x, y \in \mathbf{R}^n$ vectores tales que $T(x) = T(y)$, es decir: $Ay = Ax$, de donde:

$$A(y-x) = 0,$$

éste es un sistema homogéneo, como se sabe éste sistema siempre tiene solución. Si $rango(A) = n$, entonces la única solución es la nula esto es $y - x = 0$, por tanto T es uno a uno si $rango(A) = n$. En particular si $m = n$, T es uno a uno ssi $A \in M_{n,n}$ es invertible.

Definición 58 **(Transformación inversa)** Sea T una transformación lineal. $T : V \to W$, tal que $W = Im(T)$. Se dice que T es invertible si existe una transformación lineal T^{-1} de W en V tal que

$$\begin{aligned} T^{-1}(T(v)) &= v, \\ T\left(T^{-1}(w)\right) &= w \end{aligned}$$

para todo $v \in V$ y todo $w \in W$.

Teorema 47 $T : V \to Im(T)$ es invertible si y solamente si $Nul(T) = \{0\}$

Ejemplo 130 Sea $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, definida por $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x-y \\ 4x-y \end{pmatrix}$ (a) determinar si es o no invertible, (b) si fuera invertible determinar la inversa.

Solución. (a) El núcleo se encuentra resolviendo

$$\begin{aligned} 3x-y &= 0 \\ 4x-y &= 0 \end{aligned}$$

la única solución es $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, por tanto $Nul(T) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, luego T es invertible.

(b) Sea $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ tal que $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, esto origina el sistema:

$$\begin{aligned} 3x - y &= a \\ 4x - y &= b \end{aligned}$$

resolviendo se encuentra $x = b - a$, $y = 3b - 4a$, de donde se deduce que la transformación inversa es:

$$T^{-1}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b-a \\ 3b-4a \end{pmatrix}$$

o empleando las variables x, y :

$$T^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y-x \\ 3y-4x \end{pmatrix}$$

Ejercicios propuestos

En los siguientes ejercicios, determinar T^{-1} si ésta existe.

1) $T : \mathbf{R}^2 \to Im(T)\,, T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-2y \\ 2x-3y \\ x-y \end{pmatrix}$. Sol. $T^{-1}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3a+2b \\ b-2a \end{pmatrix}$, $c = b - a$

2) $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$, $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-2y+z \\ x+y-3z \end{pmatrix}$. Sol. No existe

3) $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$, $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+z \\ 2x+y-2z \\ x+2y-z \\ x-z \end{pmatrix}$, Sol. No existe

4) $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^4$, $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-2y \\ -x+3y \\ 3x-5y \\ 0 \end{pmatrix}$, Sol. $T^{-1}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a+2b \\ a+b \end{pmatrix}$, $c = 4a + b$, $d = 0$

5) Sea

$$W = \left\{ a\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : a, b \in \mathbf{R} \right\}$$

Se define $T : W \to \mathbf{R}^2$ por $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x+y \\ 8x+3y \end{pmatrix}$, $z = 2x+y$. Sol. $T^{-1}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a-b \\ -8a+3b \\ -2a+b \end{pmatrix}$..

7.6 La matriz de una transformación lineal

7.6.1 Matriz de coordenadas de un vector

Sea U un espacio vectorial y $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ una base de U. Si $u \in U$, entonces u se escribe como:

$$u = c_1u_1 + c_2u_2 + \cdots + c_nu_n,$$

la matriz

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

se llama matriz de coordenadas del vector u relativo a la base B. Emplearemos la notación:

$$[B]_u = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

Ejemplo 131 En $\mathbf{R}^3$ se considera la base

$$B = \left\{ u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

sea $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, para encontrar la matriz de coordenadas $[B]_u$ se plantea el sistema:

$$c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_3 = u$$

lo que origina:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

resolviendo se encuentra $c_1 = 1$, $c_2 = 0$, $c_3 = 2$, por tanto la matriz de coordenadas es: $[B]_u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

7.6.2 Matriz de coordenadas de una transformación lineal

Sea $T : U \to V$ una transformación lineal y $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ una base de U y $C = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ una base de V. Puesto que C es una base de V, entonces cada vector $T(u_j)$ se escribe como combinación lineal de los vectores $v_1, v_2, \ldots, v_m$, es decir:

$$\begin{aligned} T(u_1) &= a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + \cdots a_{m1}v_m \\ T(u_2) &= a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + \cdots a_{m2}v_m \\ &\ldots \\ T(u_n) &= a_{1n}v_1 + a_{2n}v_2 + \cdots a_{mn}v_m \end{aligned}$$

las componentes de la matriz $[T(u_j)]_C = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ forman la $j-$*ésima* columna de la **matriz de coordenadas** de la transformación T, se denota con $[T]_B^C$, es decir: $[T]_B^C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$

Teorema 48 Sea $T: U \to V$ una transformación lineal y $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ una base de U y $C = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ una base de V. Entonces: $[T]_C(u) = [T]_B^C \cdot [u]_B$ para todo $u \in U$.

Demostración. Sea $u \in U$, existen números $c_1, c_2, \ldots, c_n$ tal que:

$$u = c_1u_1 + c_2u_2 + \cdots + c_nu_n,$$

por tanto: $[u]_B = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ por otra parte aplicando la transformación se encuentra:

$$T(u) = c_1T(u_1) + c_2T(u_2) + \cdots + c_nT(u_n),$$

entonces:

$$\begin{aligned} T(u) = {} & c_1(a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + \cdots a_{m1}v_m) \\ & + c_2(a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + \cdots a_{m2}v_m) \\ & + \cdots \\ & + c_n(a_{1n}v_1 + a_{2n}v_2 + \cdots a_{mn}v_m) \end{aligned}$$

reordenando respecto a los vectores v_i se encuentra:

$$\begin{aligned} T(u) = {} & (a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \cdots a_{1n}c_n)v_1 \\ & + (a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \cdots a_{2n}c_n)v_2 \\ & + \cdots \\ & + (a_{m1}c_1 + a_{m2}c_2 + \cdots a_{mn}c_n)v_m \end{aligned}$$

por tanto:

$$\begin{aligned} [T(u)]_C &= \begin{pmatrix} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \cdots a_{1n}c_n \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \cdots a_{2n}c_n \\ \vdots \\ a_{m1}c_1 + a_{m2}c_2 + \cdots a_{mn}c_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} \\ &= [T]_B^C[u]_B. \end{aligned}$$

■

Ejemplo 132 Considere la transformación lineal $T: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ definida por

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ y+z \end{pmatrix}.$$

Sean $B = \left\{ u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, C = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ bases de $\mathbf{R}^3$ y $\mathbf{R}^2$ respectivamente.

(a) Calcular $[T]_B^C$

(b) Empleando el teorema 48 (pág. 136) calcular $[T(u)]_C$, donde $u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(c) Calcular $[T(u)]_C$ directamente.

Solución. (a) *Cálculo de la primera columna:* Se calcula $[T(u_1)]_C$, las componentes de éste vector son las soluciones del sistema:

$$x_1v_1 + x_2v_2 = T(u_1)$$

así se plantea el sistema:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 \\ 0+1 \end{pmatrix}$$

resolviendo se encuentra: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, luego $[T(u_1)]_C = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Cálculo de la segunda columna: Se calcula $[T(u_2)]_C$, las componentes de éste vector son las soluciones del sistema:

$$x_1v_1 + x_2v_2 = T(u_2)$$

así se plantea el sistema:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 \\ 0+(-1) \end{pmatrix}$$

resolviendo se encuentra: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \end{pmatrix}$, luego $[T(u_2)]_C = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \end{pmatrix}$.

Cálculo de la tercera columna: Se calcula $[T(u_3)]_C$, las componentes de éste vector son las soluciones del sistema:

$$x_1v_1 + x_2v_2 = T(u_3)$$

así se plantea el sistema:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+1 \\ 1+0 \end{pmatrix}$$

resolviendo se encuentra: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, luego $[T(u_3)]_C = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

De lo anterior se deduce: $[T]_B^C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ -3 & -7 & -3 \end{pmatrix}$

Solución (b) Empleando el teorema mencionado sólo es necesario calcular $[u]_B$, las componentes de éste vector son las soluciones del sistema:

$$x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3 = u,$$

es decir:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

resolviendo se encuentra: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, por tanto: $[u]_B \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, por tanto:

$$\begin{aligned} [T(u)]_C &= [T]_B^C [u]_B \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ -3 & -7 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 9 \\ -15 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Solución (c). Se encuentra resolviendo el sistema

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 = T(u) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

de donde:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

resolviendo se encuentra

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -15 \end{pmatrix}$$

es decir: $[T(u)]_C = \begin{pmatrix} 9 \\ -15 \end{pmatrix}$.

Ejercicios propuestos

En los siguientes ejercicios, determinar, si es posible, $[T]_B^C$.

1) $T: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$, $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y \\ x - 3y \\ 3x + y \end{pmatrix}$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \; C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

determinar también $[T(u)]_C$, $u = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

2) $T: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y \\ x - 3y \end{pmatrix}$,

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, \; C = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

7.6.3 Cambio de base

Teorema 49 Sea $T: V \to W$ una transformación lineal. Sean B, B' bases de V y C, C' bases de W, entonces:

$$[T]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{C}} = [Id]_{\mathscr{C}'}^{\mathscr{C}} \cdot [T]_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{C}'} \cdot [Id]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$$

donde I_W e I_V son las aplicaciones identidad en W y V.

Ejemplo 133 Considere la transformación $T:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^3$, definida por

$$T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-y\\-x+2y\\x+y\end{pmatrix}$$

$$\text{Sean } B=\left\{e_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},e_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\},\ C=\left\{f_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ f_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},f_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

bases de $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$ respectivamente. La matriz de coordenadas de T relativo a estas bases es: $[T]_B^C=$ $\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\\1&1\end{pmatrix}$ Sean $B'=\left\{e_1'=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix},e_2'\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}\right\}$ y $C'=\left\{f_1'=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},f_2'=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},f_3'=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$ nuevas bases de $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$, calcularemos $[T]_{B'}^{C'}$ empleando el resultado:

$$[T]_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{C}}=[Id]_{\mathscr{C}}^{\mathscr{C}'}\cdot[T]_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{C}'}\cdot[Id]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$$

- Cálculo de $[I_W]_C^{C'}$. (aquí $W=\mathbf{R}^3$). **Primera columna:**

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

  resolviendo se encuentra el vector : $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

  Segunda columna:

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

  cuya solución es: $\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$.

  Tercera columna:

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

  resolviendo se encuentra la solución: $\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$.

  De lo anterior se sigue que

$$[I_W]_C^{C'}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&-1&1\\1&1&-2\end{pmatrix}$$

- Cálculo de $[I_V]_{B'}^{B}$ (aquí $V=\mathbf{R}^2$) **Primera columna**:

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$$

es claro que la solución es:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Segunda columna:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

la solución es $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, por tanto:

$$[I_V]_{B'}^{B} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Finalmente:

$$\begin{aligned} [T]_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{C}'} = [Id]_{\mathscr{C}}^{\mathscr{C}'} \cdot [T]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{C}} \cdot [Id]_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 5 \\ -8 & -11 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ejercicios propuestos

En los siguientes problemas, determinar $[T]_{B'}^{C'}$

1)

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-2y \\ -2x \\ 3x+y \end{pmatrix}$$

$$B = \left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, C = \left\{ f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, f_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$B' = \left\{ e_1' = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, e_2' \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}, C' = \left\{ f_1' = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, f_2' = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, f_3' = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

Sol. $\begin{pmatrix} -13 & -19 \\ 0 & 1 \\ -7 & -10 \end{pmatrix}$

2) Determinar $[T]_{B}^{C}$ y $[T]_{B'}^{C'}$ si:

$$T(x,y) = \begin{pmatrix} x-2y \\ -2x \\ x-y \end{pmatrix}$$

$$B = \left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, C = \left\{ f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, f_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$B' = \left\{ e_1' = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, e_2' \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}, C' = \left\{ f_1' = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, f_2' = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, f_3' = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

Sol. $[T]_B^C = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ -2 & 2 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$, $[T]_{B'}^{C'} = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ -10 & -13 \\ -7 & -10 \end{pmatrix}$

7.7 Operadores lineales

Un operador lineal es una transformación lineal de un espacio vectorial en sí mismo, es decir es una transformación lineal de la forma $T : V \to V$. Es claro que todo lo aplicado a transformaciones se aplica a operadores. En esta sección nos interesa discutir la diagonalización de un operador lineal.

Sea $T : V \to V$ un operador, donde V es de dimensión n, sea B una base de V y sea $A = [T]_B^B$, sea B' una nueva base de V tal que $[T]_{B'}^{B'}$ es diagonal, en estas condiciones se dirá que T es diagonalizable. Antes de ver las condiciones bajo las cuales un operador es diagonalizable, notemos que:

Teorema 50 $\left([I_V]_B^{B'}\right)\left([I_V]_{B'}^{B}\right) = I$, aquí I la matriz identidad en $M_{n,n}$.

Por tanto si $[I_V]_{B'}^B = P$, entonces $[I_V]_B^{B'} = P^{-1}$.

Empleando el teorema 49 se encuentra $T_{B'}^{B'} = P^{-1}AP$ esto significa que T es diagonalizable si es posible encontrar una base B' formada por autovectores de A.

Ejemplo 134 Sea $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, definida por:

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 2y - z \\ -2x - 2y - 2z \\ 6x + 12y + 8z \end{pmatrix}$$

con la base canónica $B = \{e_1, e_2, e_3\}$, la matriz de la transformación es:

$$[T]_B^B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 6 & 12 & 8 \end{pmatrix}$$

los autovalores y autovectores se muestran en la siguiente tabla

Autovalor	Autovectores asociados
3	$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

así la base que diagonaliza, la transformación lineal es:

$$B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Ejercicios propuestos

Determinar bases que diagonalizan, si fuera posible, la transformación lineal dada.

1) $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ -2x-z \\ 2x+2y+3z \end{pmatrix}$, Sol. No existe.

2) $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ -z \\ 2y+3z \end{pmatrix}$, Sol. Una base es $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

7.8 La geometría de las transformaciones

7.8.1 Transformaciones lineales

Considérese la transformación lineal:

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y \\ x-y \end{pmatrix}$$

y el cuadrado de vértices $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ y $(0,1)$. T transforma el cuadrado en el paralelogramo de vértices$(0,0)$, $(1,1)$, $(3,0)$ y $(2,-1)$.

7.8.2 La transformación rotación

La matriz de rotación para el plano $\mathbf{R}^2$ se define por:

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Propiedades. La matriz de rotación tiene las siguientes propiedades:

1) Es ortogonal, esto es $R(\theta)$ es invertible, más aún la inversa es su transpuesta.

2) El resultado de $R(\theta)$ por $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ es una rotación del punto $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ en un ángulo de θ radianes en sentido positivo.

En base a esta matriz definimos la transformación: $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ por:

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

La norma euclidiana de $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ resulta ser:

$$\begin{aligned}
\left\| T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\| &= \left\| \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\| \\
&= \sqrt{\left(\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right)^t \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} \\
&= \sqrt{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} \\
&= \sqrt{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} \\
&= \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|
\end{aligned}$$

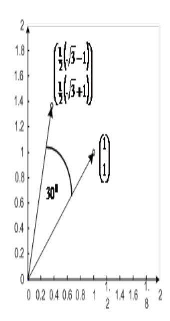
por tanto la transformación T preserva la norma.

Ejemplo 135 Si se quiere hacer una rotación de 30^0, la transformación será:

$$
\begin{aligned}
T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\pi/6 & -\sin\pi/6 \\ \sin\pi/6 & \cos\pi/6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3}x - \frac{1}{2}y \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sqrt{3}y \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Así, el punto $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ se transforma en:

$$
T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}-1\right) \\ \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}+1\right) \end{pmatrix}
$$

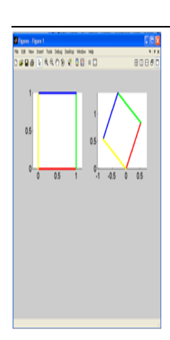


Programa en MatLab

El siguiente programa rota cada punto del cuadrado de vértices $(0,0),(0,1),(1,1)$ y $(0,1)$ un ángulo de θ.

```
function rotacion(theta)
%Transforma el cuadrado de vértices (0,0),(0,1),(1,1),(1,0)
%en un cuadrado rotado un ángulo theta mediante la transformación
% T(x,y)=R(theta)*(x,y)' donde R(theta) es la matriz de rotación
subplot(2,2,1)
hold on
subplot(2,2,2)
hold on
paso=0.01;
for x=0:paso:1
    [u,v]=F(x,0,theta);
    subplot(2,2,1)
    plot(x,0,'.r')
    subplot(2,2,2)
    plot(u,v,'.r')
end
for y=0:paso:1
    [u,v]=F(1,y,theta);
    subplot(2,2,1)
    plot(1,y,'.g')
    subplot(2,2,2)
    plot(u,v,'.g')
end
for x=1:-paso:0
    [u,v]=F(x,1,theta);
    subplot(2,2,1)
```

```
        plot(x,1,'.b')
        subplot(2,2,2)
        plot(u,v,'.b')
end
for y=1:-paso:0
        [u,v]=F(0,y,theta);
        subplot(2,2,1)
        plot(0,y,'.y')
        subplot(2,2,2)
        plot(u,v,'.y')
end
subplot(2,2,1)
axis equal
subplot(2,2,2)
axis equal
%Calcula el punto con la rotacion theta
function [u,v]=F(x,y,theta)
matriz_rotacion=[cos(theta) -sin(theta);sin(theta) cos(theta)];
z=matriz_rotacion*[x y]';
u=z(1); v=z(2);
```



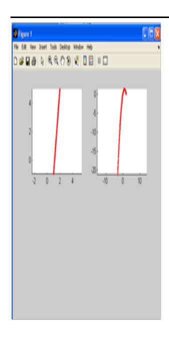
7.8.3 Transformaciones no lineales

Las transformaciones lineales tienen la propiedad de preservar las figuras, por ejemplo cuadriláteros en cuadriláteros, esto no ocurre con las transformaciones no lineales, por ejemplo considérese la transformación:

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ x^2-y^2 \end{pmatrix}$$

```
function Tran_no_lin
%Transforma el segmento que va de (1,-1) a (2,5)
%mediante una transformación no lineal dado por:
% u=x-y, v=x^2-y^2
subplot(2,2,1)
hold on
subplot(2,2,2)
hold on
paso=0.01;
for t=0:paso:1;
        x=1+t; y=-1+6*t;
        [u,v]=F(x,y);
        subplot(2,2,1)
```

```
        plot(x,y,'.r')
        subplot(2,2,2)
        plot(u,v,'.r')
end
subplot(2,2,1)
axis equal
subplot(2,2,2)
axis equal
%Calcula el punto (u,v)
function [u,v]=F(x,y)
        u=x-y;
        v=x^2-y^2;
```



8 — Factorización LU y LR

Actualmente la factorización matricial se ha convertido en una herramienta útil para resolver algunos problemas como familias de sistemas como $Ax = b$, en donde b es fijo y A puede cambiar. También la factorización se puede emplear en el cálculo de autovalores de una matriz. En este capítulo nos dedicamos a estudiar un tipo de factorización basada en la reducción de Gauss. Existen otras factorizaciones como la factorización QR que cae fuera del alcance de los objetivos de este texto.

8.1 Matrices elementales

Definición 59 Una matriz elemental en $M_{n,n}$ es una matriz de la forma:

$$E_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & d_{k+1,k} & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{n,k} & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Observe que E_k es igual a la matriz identidad excepto en las entradas $E_k(k+1,k), \ldots, E_k(n,k)$. Observe también que una matriz elemental tiene la forma:

$$E_k = I + \tau_k e_k^t$$

donde I es la matriz identidad en $M_{n,n}$ y:

$$\tau_k = (0, \ldots, 0, d_{k+1,k}, \ldots, d_{n,k})^t$$

y e_k es el k-ésimo vector canónico. Más aún obsérvese que $e_i^t \tau_k = 0$ para $i = 1, \ldots, k$.

Ejemplo 136

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I + \tau_2 e_2^t$$

Aquí:

$$\tau_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

es inmediato comprobar que $e_1^t \tau_2 = 0$ y $e_2^t \tau_2 = 0$.

Ejercicios propuestos

1) Probar que $e_i^t \tau_k = 0$ para $i = 1, \ldots, k$.
2) ¿Es el producto de matrices elementales una matriz elemental?. Justificar su respuesta.
3) ¿Es el suma de matrices elementales una matriz elemental?. Justificar su respuesta.

8.2 La inversa de una matriz elemental

La inversa de la matriz elemental $E = I + \tau_k e_k^t$ es

$$E^{-1} = I - \tau_k e_k^t,$$

en efecto:

$$\begin{aligned} \left(I + \tau_k e_k^t\right)\left(I - \tau_k e_k^t\right) &= I - \tau_k e_k^t + \tau_k e_k^t - \left(\tau_k e_k^t\right)\left(\tau_k e_k^t\right) \\ &= I - \tau_k \left(e_k^t \tau_k\right) e_k^t \\ &= I \end{aligned}$$

Similarmente se prueba

$$\left(I - \tau_k e_k^t\right)\left(I + \tau_k e_k^t\right) = I$$

(Observemos que $e_k^t \tau_k = 0$).

Lo anterior muestra que la inversa de una matriz elemental se consigue cambiando de signo las componentes del vector τ_k.

Ejemplo 137

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

claramente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

8.3 La matriz elemental como aniquilador

Las matrices elementales se usan para triangularizar matrices, iniciamos esta sección con el siguiente resultado.

8.3.1 Aniquilación bajo la primera entrada

Teorema 51 Dado el vector columna

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

con $u_1 \neq 0$, existe una matriz elemental E tal que $Eu = u_1 e_1$.

Demostración. Motivado por las operaciones elementales de la reducción de gauss definimos:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{u_2}{u_1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{u_3}{u_1} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ -\frac{u_n}{u_1} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

es inmediato probar que $Eu = u_1 e_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

■

Definición 60 Los números $d_{i1} = -\frac{u_i}{u_1}$, $i = 2, \ldots, n$ se llaman **multiplicadores**.

8.3.2 Aniquilador general

Teorema 52 Dado el vector columna

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_k \\ u_{k+1} \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

con $u_k \neq 0$, existe una matriz elemental E tal que aniquila las entradas bajo u_k, es decir, las últimas $n-k$ entradas de u.

Demostración. Por el teorema previo, la matriz de aniquilación de las entradas bajo u_k en el vector

$$v = \begin{pmatrix} u_k \\ u_{k+1} \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

es

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ d_{k+1,k} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n,k} & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in M_{n-k+1,n-k+1}$$

donde $d_{jk} = -\frac{u_j}{u_k}$. Definimos

$$E = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & F \end{pmatrix} \in M_{n,n}$$

donde I es la matriz identidad en M_{k-1}. Claramente:

$$Eu = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{k-1} \\ \hline v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 138 Hallar la matriz de aniquilación que aniquile los últimos 2 términos de $u = (1,2,3,4,5)^t$

Solución. La matriz de aniquilación para aniquilar las entradas bajo la primera en el vector $(3,4,5)^t$ es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{4}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{5}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

por tanto, añadiendo la matriz identidad en $M_{2,2}$ se encuentra la matriz

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

fácilmente podemos verificar que:

$$Eu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicios propuestos

1) Hallar una matriz de aniquilación E tal que $Eu = 5e_1$ donde $u = (5,1,-4,2)^t$.
2) Hallar una matriz de aniquilación E tal que $Eu = (u_1,u_2,0,\ldots,0)^t$ donde $u = (u_1,u_2,\ldots,u_n)^t$.
3) Hallar una matriz de aniquilación E que aniquile los últimos 3 términos del vector:

$$u = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

8.4 Factorización LU

8.4.1 El algoritmo de Gauss en la factorización

Sea $A \in M_{m,n}$. Supóngase que en el proceso de triangularización de *Gauss* no se requiere intercambios de fila. Triangularizamos A mediante la siguiente sucesión de pasos:

Paso 1. Sea A^1 la **primera** columna de A tal que su **primera** entrada es no nula. Existe una matriz elemental E_1 que aniquila las entradas bajo la **primera** entrada del vector A^1, entonces las propiedades del producto de matrices permiten probar que E_1A tiene la forma:

$$E_1A = \begin{pmatrix} a_{11} & * & \cdots & * \\ 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & * & \cdots & * \end{pmatrix}$$

aquí, los asteriscos muestran las entradas que no necesariamente son ceros.

Paso 2. Sea A^2 la **segunda** columna de E^1A tal que su **segunda** entrada en no nula. Existe una matriz elemental E_2 que aniquila las entradas bajo la **segunda** entrada del vector A^2, se puede probar que:

$$E^2E^1A = \begin{pmatrix} a_{11} & * & * & \cdots & * \\ 0 & a_{22} & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & * & \cdots & * \end{pmatrix}$$

siguendo de esta manera, y asumiendo que las entradas a_{jj} necesarios para la aniquilación son no nulos, en el paso k, $k < n$ se tendrá:

$$E_kE_{k-1}\cdots E_2E_1A = U,$$

donde U es una matriz triangular superior. Definimos $L^{-1} = E_kE_{k-1}\cdots E_2E_1$, entonces de la anterior igualdad:

$$A = LU,$$

esta es la llamada factorización LU.

En la siguiente sección veremos la forma práctica de calcular la matriz L sin necesidad de realizar el producto de matrices elementales y luego calcular su inversa.

8.4.2 Cálculo de la matriz L

Para fijar ideas, empezamos la discusión con $n = 3$, cuando $A \in M_{3,3}$, la forma de L es: $L = (E_2E_1)^{-1}$. Sean d_{21}, d_{31} los multiplicadores empleados en el primer paso y d_{32} el multiplicador del segundo paso. Definimos:

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ d_{21} \\ d_{31} \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d_{32} \end{pmatrix},$$

por tanto las matrices elementales son:

$$E_1 = I + \tau_1 e_1^T, \quad E_2 = I + \tau_2 e_2^t$$

luego:

$$\begin{aligned} L &= (E_2E_1)^{-1} \\ &= E_1^{-1}E_2^{-1} \\ &= \left(I - \tau_1 e_1^t\right)\left(I - \tau_2 e_2^t\right) \end{aligned}$$

es decir:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -d_{21} & 1 & 0 \\ -d_{31} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -d_{32} & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -d_{21} & 1 & 0 \\ -d_{31} & -d_{32} & 1 \end{pmatrix}$$

Así la matriz L está formada por los multiplicadores del proceso de aniquilación de *Gauss* con signo cambiado y en el lugar correspondiente.En general para matrices en $M_{n,n}$ la matriz L tiene la siguiente forma:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -d_{21} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ -d_{31} & -d_{32} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -d_{n-1,1} & -d_{n-1,2} & \cdots & 1 & 0 \\ -d_{n1} & -d_{n2} & \cdots & -d_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix}$$

donde los números d_{ij} son los multiplicadores que permiten triangularizar la matriz A.

Ejemplo 139 Considérese la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -1 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcular matrices L y U tales que $A = LU$.

Solución. Procedemos con la eliminación gausiana sin pivote.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -1 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} F_{21(1/2)}$$
$$F_{31(-1/2)} \sim \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 0 & 7 & -5/2 \\ 0 & -4 & 3/2 \end{pmatrix}_{F_{32(4/7)}}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 0 & 7 & -5/2 \\ 0 & 0 & 1/14 \end{pmatrix} = U$$

Los multiplicadores de la matriz elemental E_1 son $\frac{1}{2}$ y $-\frac{1}{2}$. El multiplicador de E_2 es $\frac{4}{7}$, por tanto la matriz L es

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{-1/2} & 1 & 0 \\ \mathbf{1/2} & \mathbf{-4/7} & 1 \end{pmatrix}$$

Un cálculo directo muestra que:

$$LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & -4/7 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 0 & 7 & -5/2 \\ 0 & 0 & 1/14 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -1 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = A$$

Ejemplo 140 Considérese la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

realizando operaciones elementales de fila se tiene:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} F_{21(2)}$$

$$F_{31(-2)}$$

$$F_{41(-1)} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 6 & 3 \\ 0 & 3 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} F_{32(3)}$$

$$F_{42(2)}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 15 & 8 \\ 0 & 0 & 15 & 8 \end{pmatrix}_{F_{43(-1)}} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 15 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = U$$

Luego

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Claramente:

$$A = LU$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 15 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Observación importante. Observemos que el rango de A es 3, esto permite escribir $A = L_0U_0$, donde:

$$L_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad U_0 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 15 & 8 \end{pmatrix}$$

en general para $A \in M_{m,n}$ con $rango\,(A) = r$, la matriz A se factoriza como $A = LU$, donde $L \in M_{m,r}$ y $U \in M_{r,n}$

8.4.3 Forma práctica de la construcción de L

Puesto que L se construye con los multiplicadores, se puede llevar un registro de estos multiplicadores simultáneamente a la triangularización tomando en cuenta que el multiplicador d_{ij} se convierte en $-d_{ij}$ (y en la posición i, j) en la matriz L. Esta técnica se empleará también en la siguiente sección.

Ejemplo 141 Considérese la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

realizando operaciones elementales de fila se tiene:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} F21(2)$$

$$F31(-2)$$

$$F41(-1) \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ \mathbf{-2} & -1 & 6 & 3 \\ \mathbf{2} & 3 & -3 & -1 \\ \mathbf{1} & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} F32(3)$$

$$F42(2)$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ \mathbf{-2} & -1 & 6 & 3 \\ \mathbf{2} & \mathbf{-3} & -3 & -1 \\ \mathbf{1} & \mathbf{-2} & 3 & 2 \end{pmatrix}_{F43(-1)} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ \mathbf{-2} & -1 & 6 & 3 \\ \mathbf{2} & \mathbf{-3} & -3 & -1 \\ \mathbf{1} & \mathbf{-2} & \mathbf{1} & 2 \end{pmatrix}$$

La matriz L_0 tiene unos en la diagonal principal, ceros arriba de la diagonal y por debajo de la diagonal se construye con la parte diagonal inferior de la última matriz encontrada (**en negrillas**). La matriz U_0 se contruye con la parte triangular superior de la última matriz encontrada.

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \; U = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Claramente:

$$\begin{aligned} A &= LU \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 15 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ejercicios propuestos

1) Factorizar

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Sol.:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1/2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3/2 \end{pmatrix}$$

8.5 Factorización LR

8.5.1 Matrices de permutación

Definición 61 (Matriz de permutación) Una matriz de permutación es aquella matriz cuadrada que se obtiene de la identidad mediante un número finito de cambios de fila. Nótese que la matriz identidad misma es una matriz de permutación.

Propiedades de la matriz de permutación.

- Una matriz de permutación es ortogonal, luego si P es ortogonal entonces $P^{-1} = P^t$.

Ejemplo 142

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad P^{-1} = P^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Sea P una matriz de permutación y B la matriz obtenida de una matriz A mediante las mismas operaciones elementales de fila aplicadas para obtener P desde la matriz identidad, entonces: $B = PA$.

Notación práctica para matrices de permutación

Sea e_i el vector fila con la unidad en su i-ésima coordenada y ceros en las demás, entonces la matriz identidad $I \in M_{n,n}$ se escribirá como

$$I = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix},$$

y una matriz de permutación como:

$$P = \begin{pmatrix} e_{i_1} \\ e_{i_2} \\ \vdots \\ e_{i_n} \end{pmatrix}$$

donde $i_1, i_2, \ldots, i_n$ es una permutación del conjunto $1, 2, \ldots, n$, más aún prescindiendo de la letra e, la matriz de permutación P se puede escribir como:

$$P = \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_n \end{pmatrix}$$

al vector de la derecha se llamará **vector de índices.**

Ejemplo 143 Considere la matriz

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

entonces P se puede representar como:

$$P = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

8.5.2 Factorización con el algoritmo de Gauss con pivote

Considérese una matriz $A \in M_{m,n}$ de rango r. Para triangularizar A aplicaremos el algoritmo de reducción de Gauss con pivote, como se sabe, este algoritmo en general requiere cambios de fila Supóngase que se realizan de inicio todos los cambios de fila necesarios, así podemos suponer la existencia de una matriz de permutación P tal que en PA no serán necesarios los cambios de fila al triangularizar la matriz. Con $s = \text{mín}\{m-1, r, n\}$, existen s matrices elementales $E_1, \ldots, E_s$ tales que

$$R = E_s E_{s-1} \cdots E_1 (PA)$$

es una matriz escalonada con sus r primeras filan no nulas y las restantes iguales a cero. Procediendo como es usual, haciendo $L = (E_s E_{s-1} \cdots E_1)^{-1}$ se encuentra:

$$PA = LR$$

donde L tiene la siguiente forma:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -d_{21} & 1 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ -d_{s1} & -d_{s2} & \vdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -d_{s+1,1} & -d_{s+1,2} & \cdots & -d_{s+1,s} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -d_{s+2,1} & -d_{s+2,1} & \cdots & -d_{s+2,s} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -d_{m1} & -d_{m2} & \cdots & -d_{m,s} & 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

8.5.3 Sobre la construcción de la matriz L y P

La matriz L se construirá como en el caso de la factorización LU salvo que el el caso de cambios de fila los multiplicadores también se intercambian. Por otra parte para la construcción de la matriz de permutación P se inicia con el vector

$$i = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$$

que representa a la matriz identidad, en cada cambio de fila del algoritmo de Gauss, este vector también cambia con la misma operacion elemental. El último vector i que se tiene permite contruir la matriz P.

Ejemplo 144 Considérese la siguiente triangularización

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -4 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 4 \\ 4 & 0 & 16 & 8 \end{pmatrix}_{F_{13}} \sim \begin{pmatrix} 4 & 0 & 16 & 8 \\ 1 & 2 & 4 & 4 \\ -2 & -4 & -2 & 0 \end{pmatrix} F_{21(-1/4)}$$

$$F_{31(1/2)}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 4 & 0 & 16 & 8 \\ \mathbf{1/4} & 2 & 0 & 2 \\ \mathbf{-1/2} & -4 & 6 & 4 \end{pmatrix}_{F_{23}} \sim \begin{pmatrix} 4 & 0 & 16 & 8 \\ \mathbf{-1/2} & -4 & 6 & 4 \\ \mathbf{1/4} & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}_{F_{32(1/2)}}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 4 & 0 & 16 & 8 \\ \mathbf{-1/2} & -4 & 6 & 4 \\ \mathbf{1/4} & \mathbf{-1/2} & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Por las consideraciones anteriores

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 1/4 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 16 & 8 \\ 0 & -4 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Como se han realizado las operaciones elementales de cambio de fila F_{13} y F_{23} (en ese orden) el vector de índices cambia del siguiente modo:

$$i = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}_{F_{13}} \sim \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{F_{23}} \sim \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

por tanto la matriz P es:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

se observa:

$$LR = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 1/4 & -1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 16 & 8 \\ 0 & -4 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 16 & 8 \\ -2 & -4 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$PA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -4 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 4 \\ 4 & 0 & 16 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 16 & 8 \\ -2 & -4 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

tal como se esperaba.

Ejemplo 145 Consideremos ahora la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & -6 & -3 & 2 & 1 \\ 4 & -4 & -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

procedemos a la triangularización.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & -6 & -3 & 2 & 1 \\ 4 & -4 & -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}_{F_{12}} \sim \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & -6 & -3 & 2 & 1 \\ 4 & -4 & -4 & 2 & 2 \end{pmatrix} F_{21(0)}$$

$$F_{31(1)}$$
$$F_{41(1)}$$

$$\sim \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ \mathbf{0} & 2 & -1 & 0 & 1 \\ \mathbf{-1} & -6 & -3 & 3 & 3 \\ \mathbf{-1} & -4 & -4 & 3 & 4 \end{pmatrix}_{F_{23}} \sim \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ \mathbf{-1} & -6 & -3 & 3 & 3 \\ \mathbf{0} & 2 & -1 & 0 & 1 \\ \mathbf{-1} & -4 & -4 & 3 & 4 \end{pmatrix} F_{32(1/3)}$$

$$F_{42(-2/3)}$$

$$\sim \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ \mathbf{-1} & -6 & -3 & 3 & 3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1/3} & -2 & 1 & 2 \\ \mathbf{-1} & \mathbf{2/3} & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{F_{43(-1)}} \sim \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ \mathbf{-1} & -6 & -3 & 3 & 3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1/3} & -2 & 1 & 2 \\ \mathbf{-1} & \mathbf{2/3} & \mathbf{1} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

por tanto

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1 & 0 \\ -1 & 2/3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -6 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

el vector de índices tiene la siguiente variación:

$$i = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}_{F_{12}} \sim \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}_{F_{23}} \sim \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

luego la matriz de permutación es:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

se puede probar que: $PA = LR$.

Ejercicios propuestos

1) Factorizar:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 5 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Sol. $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2/5 & 1 & 0 \\ 2/5 & 3/8 & 1 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 0 & -8/5 & 3/5 \\ 0 & 0 & -13/8 \end{pmatrix}$

2) Factorizar:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Sol.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1/2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}, R \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 3/4 \end{pmatrix}$$

3) Factorizar:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Sol.

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4) Factorizar:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 4 & 3 \\ 4 & 5 & 4 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Sol.

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 4 & 5 & 4 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

8.6 La factorización y la solución de sistemas lineales

8.6.1 Factorización LU

La factorización LU, puede utilizarse para resolver un sistema $Ax = b$, donde $A \in M_{n,n}$ es invertible. Si $A = LU$, el sistema a resolver es $LUx = b$. Esto origina el siguiente proceso:

Paso 1. Se asigna

$$z = Ux,$$

así se tiene el **sistema triangular** $Lz = b$

Paso 2. Se resuelve

$$Lz = b,$$

el resultado se reemplaza en la ecuación del paso 1 y se resuelve el **sistema triangular**

$$Ux = z,$$

es claro que el vector x calculado es solución del sistema $Ax = b$.

Observación. El método LU, permite resolver el sistema $Ax = b$ resolviendo **dos sistemas triangulares**. La ventaja de éste método, es cuando se deben resolver varios sistemas de la forma $Ax = b$, en donde solamente varia el vector b, en esos casos la descomposición se realiza una sola vez, obteniéndose rápidamente las soluciones.

Ejemplo 146 Resolver:

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 21 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Solución. Anteriormente se ha encontrado que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 0 & -7 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = LU$$

Paso 1. Se asigna $Ux = z$ y se resuelve el sistema

$$Lz = b,$$

esto es,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 21 \\ -5 \end{pmatrix}$$

resolviendo por sustitución directa se encuentra

$$z = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Paso 2. Ahora resolvemos el sistema

$$Ux = z,$$

esto es,

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 0 & -7 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

resolviendo por sustitución inversa, encontramos

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

8.6.2 Factorización LR

Si se tiene $PA = LR$, entonces el sistema $Ax = b$ puede resolverse de la siguiente forma:

1) Multiplicando a la igualdad por P se tiene:

$$PAx = Pb,$$

entonces $LRx = Pb$.

2) El sistema $LRx = Pb$ se resuelve con la técnica anterior.

Ejemplo 147 Resolver el sistema $Ax = b$ siguiente:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 15 \\ 26 \end{pmatrix}$$

Solución. Factorizando A se tiene:

$$PA = LR$$

donde:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1 \end{pmatrix}, \; R = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -3/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 5/3 \end{pmatrix}$$

Se resuelve

$$LRx = Pb,$$

es decir

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -3/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 5/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 \\ 15 \\ 13 \end{pmatrix}$$

Sea $z = Rx$, así se tiene: $Lz = Pb$, esto es,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 \\ 15 \\ 13 \end{pmatrix}$$

resolviendo:

$$z = \begin{pmatrix} 26 \\ 2 \\ \frac{35}{3} \end{pmatrix}$$

Ahora se resuelve: $Rx = z$,

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -3/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 5/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 \\ 2 \\ \frac{35}{3} \end{pmatrix}$$

resolviendo:

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Ejercicios propuestos

1) (a) Resolver el sistema

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 21 \\ 28 \end{pmatrix}$$

usando el método LU.

(b) Resolver el sistema anterior con el método LR. Sol. $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$

2) Resolver el siguiente sistema para $a=1$, $a=2$ y $a=-1$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9a-5 \\ 7a+1 \\ 2a-3 \end{pmatrix}$$

Sol. $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$

8.7 La factorización y el cálculo de autovalores

Iniciamos este tema con el siguiente teorema.

Teorema 53 Sea $A \in M_{n,n}$ y $A = (P^t L)R$, donde P, L y R son de la factorización LR. Se define $B = R(P^t L)$, entonces A y B son semejantes.

Demostración. Puesto que P y L son invertibles, se encuentra $R = (P^t L)^{-1} A$, multiplicando por la derecha por $P^t L$ se obtiene:

$$R\left(P^t L\right) = \left(P^t L\right)^{-1} A \left(P^t L\right)$$

puesto que $B = R(P^t L)$, se tiene: $B = (P^t L)^{-1} A (P^t L)$, es decir A y B son semejantes.

La anterior propiedad motiva la siguiente sucesión de matrices semejantes a la matriz A:

Sea $A_1 = A$, entonces para $k = 1, 2, \ldots$

$$\begin{aligned} A_k &= \left(P_k^t L_k\right) R_k, \ \{\text{Factorización } LR\} \\ A_{k+1} &= R_k \left(P_k^t L_k\right), \end{aligned}$$

8.7.1 Convergencia de esta sucesión

La anterior sucesión de matrices $\{A_k\}$ converge a una matriz triangular de la forma:

$$\lim_{k\to\infty} A_k = \begin{pmatrix} A_{11} & * & \cdots & * \\ 0 & A_{22} & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{mm} \end{pmatrix}$$

En donde cada A_{ii} o es un número o una matriz 2×2, claramente los autovalores de A se encuentran de la diagonal de la anterior matriz triangular.

Ejemplo 148 Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 6 \\ 1 & -6 & 12 \\ -1 & -5 & 11 \end{pmatrix}$$

Sea $A_1 = A$, la factorización LR da:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1{,}0000000 & 0{,}0000000 & 0{,}0000000 \\ -0{,}2500000 & 1{,}0000000 & 0{,}0000000 \\ 0{,}2500000 & 0{,}7600000 & 1{,}0000000 \end{pmatrix}, R_1 = \begin{pmatrix} 4{,}0000000 & -5{,}0000000 & 6{,}0000000 \\ 0{,}0000000 & -6{,}2500000 & 12{,}5000000 \\ 0{,}0000000 & -0{,}0000000 & 1{,}0000001 \end{pmatrix}$$

por tanto:

$$A_2 = R_1\left(P_1^t L_1\right) = \begin{pmatrix} 1,2500000 & 2,2000000 & -5,0000000 \\ -4,6875000 & 7,7500000 & -6,2500000 \\ -0,2500001 & 1,0000001 & 0,0000001 \end{pmatrix}$$

siguiendo con este proceso se encuentran sucesivamente:

$$A_3 = \begin{pmatrix} 8,6666670 & -5,5468750 & -6,2500000 \\ 3,9111111 & -0,9166668 & -6,6666670 \\ 0,0666667 & 0,1718750 & 1,2500001 \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$A_{19} = \begin{pmatrix} 5,0000057 & 19,7055264 & 16,7676296 \\ -0,0000007 & -0,6594791 & -2,7610657 \\ -0,0000003 & 2,9238024 & 4,6594734 \end{pmatrix}$$

$$A_{20} = \begin{pmatrix} 5,0000029 & 12,3229637 & 19,7055264 \\ -0,0000004 & 3,9999971 & 2,9238024 \\ -0,0000003 & -1,7100991 & 0,0000000 \end{pmatrix}$$

Si se quiere una aproximación de por lo menos 5 decimales, la anterior matriz puede considerarse como triangular por bloques. Por tanto los autovalores de A son 5,0000029 y los autovalores de

$$A_{22} = \begin{pmatrix} 3,9999971 & 2,9238024 \\ -1,7100991 & 0,0000000 \end{pmatrix}$$

luego, los autovalores buscados son:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 5,0000029 \\ \lambda_2 &= 1,9999986 + 0,9999988\,i \\ \lambda_3 &= 1,9999986 - 0,9999988\,i \end{aligned}$$

Observación. Los autovalores exactos son: $5, 2+i, 2-i$, se observa que el anterior resultado es exacto si se toman en cuenta 5 decimales.

9 — Matrices definida positivas

Las formas cuadráticas aparecen de manera natural en muchas aplicaciones como es el caso de problemas de máximos y mínimos de funciones a varias variables. En este capítulo se estudia el marco teórico de estas formas.

9.1 Formas cuadráticas

Definición 62 (Forma cuadrática) Una forma cuadrática en $x_1, x_2, \ldots, x_n$ es una expresión de la forma:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j,$$

claramente una forma cuadrática es un polinomio de grado dos a n variables.

Ejemplo 149

$$P = 3x_1^2 + 2x_1x_2 + 6x_2^2$$

es una forma cuadrática en las variables x_1, x_2.

La forma cuadrática $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$ puede escribirse de manera única como el producto x^tAx, donde

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

y $A = (a_{ij})$ es una única matriz simétrica.

Ejemplo 150 A la forma cuadrática $P = 3x_1^2 + 2x_1x_2 + 6x_2^2$ está asociada la matriz simétrica

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix},$$

en efecto:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 3x_1^2 + 2x_1x_2 + 6x_2^2$$

9.2 Matrices definida positivas

Definición 63 (Matriz definida positiva) Una matriz simétrica $A \in M_{n,n}$ es definida positiva si

$$x^tAx > 0, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^n \text{ no nulo}$$

Ejemplo 151 Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$, entonces

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= 3x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2 \\ &= 3\left(x_1^2 - \frac{4}{3}x_2x_1 + \frac{4}{9}x_2^2\right) - \frac{4}{3}x_2^2 + 5x_2^2 \\ &= 3\left(x_1 - \frac{2}{3}x_2\right)^2 + \frac{11}{3}x_2^2 \\ &> 0 \end{aligned}$$

para todo $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ no nulo, luego A es definida positiva.

9.2.1 Algunos teoremas sobre matrices definida positivas

Teorema 54 Si A es una matriz simétrica definida positiva entonces todos sus autovalores son positivos.

Demostración. Sea λ un autovalor de A asociado al autovector v, entonces $Av = \lambda v$, por tanto:

$$v^t Av = v^t \lambda v = \lambda \|v\|^2$$

por tanto $\lambda = \dfrac{v^t Av}{\|v\|^2} > 0$, pues el es cociente de dos números positivos (nótese que al ser v un autovector, no puede ser nulo).

Teorema 55 Si cada autovalor de una matriz $A \in M_{n,n}$ simétrica es positivo, entonces A es definida positiva.

Ejemplo 152 Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$, la matriz del ejemplo 151 . La matriz A es definida positiva, sus autovalores son $4+\sqrt{5}, 4-\sqrt{5}$, ambos positivos.

Teorema 56 Si A es una matriz simétrica definida positiva entonces cada entrada $a_{ii} > 0$.

Demostración. Ejercicio. (Sug. considere el vector unitario e_i)

Teorema 57 Si A es una matriz definida positiva, entonces lo son también A^t y A^{-1}.

Demostración.

$$0 < x^t Ax = \left(x^t Ax\right)^t = x^t A^t x,$$

por tanto $x^t A^t x > 0$, esto prueba que A^t es definida positiva. Por otra parte para todo x no nulo, si $Ay = x$, entonces $y = A^{-1}x$ no es nulo, por tanto:

$$x^t A^{-1} x = y^t A^t A^{-1} Ay = y^t A^t y > 0,$$

esto prueba que A^{-1} es definida positiva.

Teorema 58 Definimos una submatriz principal a la matriz obtenida con las entradas un menor principal. Toda submatriz principal de una matriz simétrica $A \in M_{n,n}$ definida positiva es definida positiva.

Demostración. Sea S un subconjunto propio de $\{1,2,\ldots,n\}$, sea M la matriz obtenida de A eliminando las filas y columnas que no se encuentran en S. Sea $x \in \mathbb{R}^n$ tal que tiene ceros en las entradas que no se encuentran en S. Sea y el vector que queda de x eliminando las entradas que no se encuentran es S, entonces:

$$0 < x^t Ax = y^t My,$$

al ser y arbitrario no nulo, se prueba que M es definida positiva.

9.2.2 Caracterización de una matriz definida positiva

Teorema 59 Una matriz simétrica $A \in M_{n,n}$ es definida positiva si y solamente todos sus autovalores son positivos.

Demostración. Si A es definida positiva, entonces sus autovalores deben ser positivos, ver 54 página 166. Recíprocamente supóngase que los autovalores de A, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, son todos positivos. Sea P la matriz ortogonal tal que

$$P^t AP = D = diag\left(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\right),$$

entonces para todo $x \in \mathbb{R}^{\ltimes}$ no nulo:

$$\begin{aligned} x^t Ax &= x^t PDP^t x \\ &= \left(P^t x\right)^t D \left(P^t x\right) \\ &= y^t Dy \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(y_i\right)^2 > 0, \end{aligned}$$

esto prueba el teorema.

■

Definición 64 **(Matriz diagonalmente dominante)** Una matriz $A \in M_{n,n}$ es diagonalmente dominante si

$$|a_{ii}| \geq \sum j = 1 \qquad j \neq i^n \left|a_{ij}\right|, \; i = 1, 2, \ldots n$$

si $\geq$ se reemplaza por $>$, A se llama estrictamente diagonalmente dominante.

Teorema 60 Sea $A \in M_{n,n}$ matriz simétrica estrictamente diagonalmente dominante con cada $a_{ii} > 0$, entonces A es definida positiva.

Demostración. Es consecuencia directa del teorema de Gersgorin 37 página 115.

9.3 Matrices definida negativas y semidefinidas

Definición 65 **(Matriz definida negativa)** Una matriz simétrica $A \in M_{n,n}$ es definida negativa si

$$x^t Ax < 0$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$ no nulo.

Definición 66 **(Matriz semidefinida positiva)** Una matriz simétrica $A \in M_{n,n}$ es semidefinida positiva si

$$x^t Ax \geq 0$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$ no nulo.

Definición 67 **(Matriz semidefinida negativa)** Una matriz simétrica $A \in M_{n,n}$ es semidefinida negativa si

$$x^t Ax \leq 0$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$ no nulo.

Teorema 61 Una matriz simétrica $A \in M_{n,n}$ es semidefinida positiva si y solamente si sus autovalores son no negativos. (es decir existen autovalores nulos y todos los demás positivos)

Teorema 62 Una matriz simétrica A es definida negativa si y solamente si $-A$ es definida positiva.

Corolario 1 Una matriz simétrica A es definida negativa si y solamente si todos sus autovalores son negativos

Teorema 63 Una matriz simétrica $A \in M_{n,n}$ es semidefinida negativa si y solamente si sus autovalores son no positivos. (es decir existen autovalores nulos y todos los demás negativos)

Ejercicios propuestos

Mediante el cálculo de autovalores, clasificar las siguientes matrices.

1) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1. \\ -1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Sol. Definida positiva

2) $B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 1. \\ 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ Sol. Definida negativa

3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3. \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ Sol. No definida ni semidefinida

4) $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Sol. Semidefinida positiva

9.4 La signatura de una matriz simétrica

9.4.1 La definición de signatura

Definición 68 **(Signatura)** La signatura de una matriz simétrica A, denotada por $sig(A)$, es el par (p,q), donde p es el número de autovalores positivos y q el número de autovalores negativos.

Observación. Se puede probar que $rango(A) = p + q$.

Ejemplo 153 Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Esta matriz tiene los siguientes **autovalores**:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -3 \\ \lambda_2 &= 0 \\ \lambda_3 &= 5 \end{aligned}$$

por tanto la signatura de esta matriz es $sig(A) = (1,1)$ (un autovalor positivo y un autovalor negativo).

Ejemplo 154 Es claro que la signatura de

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

es $sig(B) = (2,1)$ (dos autovalores positivos y uno negativo).

La signatura puede calcularse sin necesidad de calcular los autovalores, como se verá en la siguiente sección.

9.4.2 Cálculo de la signatura con operaciones elementales

Definición 69 **(Operaciones elementales simultáneas)**Si a continuación de una operación elemental de fila se realiza la misma operación de columna, se dirá que se a hecho una operación elemental simultánea.

Ejemplo 155

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}_{F_{21}\left(-\frac{1}{2}\right)} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -\frac{5}{2} & -\frac{5}{2} \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}_{C_{21}\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

Teorema 64 Sea $A \in M_{n,n}$ matriz simétrica. Sea D la matriz diagonal obtenida de A aplicando operaciones elementales simultáneas. Entonces: $sig(A) = (p,q)$ donde p es el número de entradas positivas en la diagonal de la matriz D y q el número de entradas negativas.

Ejemplo 156 Considere la matriz del ejemplo 153, aplicando operaciones elementales se tiene:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}_{F_{21}\left(-\frac{1}{2}\right)} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -\frac{5}{2} & -\frac{5}{2} \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}_{C_{21}\left(-\frac{1}{2}\right)} \\ &\sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & -\frac{5}{2} & -\frac{5}{2} \\ 3 & -\frac{5}{2} & 2 \end{pmatrix}_{F_{31}\left(-\frac{3}{2}\right)} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & -\frac{5}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & -\frac{5}{2} & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}_{C_{31}\left(-\frac{3}{2}\right)} \\ &\sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & -\frac{5}{2} & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}_{F_{32(-1)}} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{F_{32(-1)}} \\ &\sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

luego $sig(A) = (1,1)$.

Observación. En una etapa de la reducción de Gauss, es posible realizar operaciones elementales de fila continuadas y luego sus correspondientes operaciones de columna.

Ejemplo 157 Sea: $A = \begin{pmatrix} -8 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & -8 \end{pmatrix}$, aplicando operaciones elementales se encuentra:

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} -8 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & -8 \end{pmatrix} F_{21\left(\frac{1}{4}\right)} \\
F_{31}\left(\frac{3}{8}\right) &\sim \begin{pmatrix} -8 & 2 & 3 \\ 0 & -\frac{5}{2} & \frac{11}{4} \\ 0 & \frac{11}{4} & -\frac{55}{8} \end{pmatrix} C_{21\left(\frac{1}{4}\right)} \\
& C_{31}\left(\frac{3}{8}\right) \\
&\sim \begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{2} & \frac{11}{4} \\ 0 & \frac{11}{4} & -\frac{55}{8} \end{pmatrix}_{F_{32\left(\frac{11}{10}\right)}} \sim \begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{2} & \frac{11}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{77}{20} \end{pmatrix}_{C_{32\left(\frac{11}{10}\right)}} \\
&\sim \begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{77}{20} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

por tanto $sig\,(A) = (0,3)$.

Observación. Los autovalores de A son: $-11, -7, -1$, todos negativos.

9.5 Caracterización de matrices simétricas con operaciones elementales

Teorema 65 Sea $A \in M_{n,n}$ una matriz simétrica. Sea D la matriz diagonal obtenida de A aplicando operaciones elementales simultáneas. Sea $sig\,(A) = (p,q)$ donde p es el número de entradas positivas y q el número de entradas negativas de la diagonal principal de la matriz D. Entonces:

1) Si $sig\,(A) = (n,0)$, entonces A es definida positiva.
2) Si $sig\,(A) = (0,n)$, entonces A es definida negativa.
3) Si $sig\,(A) = (p,0)$ y $p < n$, entonces A es semidefinida positiva.
4) Si $sig\,(A) = (0,q)$ y $q < n$, entonces A es semidefinida negativa.
5) Si $sig\,(A) = (p,q)$ $p \neq 0$, $q \neq 0$, entonces A no está definida.

Ejemplo 158 Sea

$$A = \begin{pmatrix} -4. & 2 & -2 \\ 2 & -4 & -2 \\ -2 & -2 & -8 \end{pmatrix}$$

aplicando operaciones elementales simultáneas se tiene:

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -2 \\ 2 & -4 & -2 \\ -2 & -2 & -8 \end{pmatrix} F21(1/2)$$

$$F31(-1/2) \sim \begin{pmatrix} -4 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & -7 \end{pmatrix} \begin{matrix} C21(1/2) \\ \\ C31(-1/2) \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & -7 \end{pmatrix}_{F32(-1)} \sim \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}_{C32(-1)}$$

$$\sim \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

por tanto $sig(A) = (0,3)$, es decir A es definida negativa.

9.6 El criterio de Sylvester

Este criterio, es otra manera de caracterización de matrices simétricas, ahora emplearemos determinantes.

Teorema 66 Sea $A \in M_{n,n}$ una matriz simétrica. Para cada k, $k = 1,2,\ldots,n$ se define Δ_k como el determinante de la matriz en $M_{k,k}$ obtenida con las primeras k filas y k columnas de la matriz A, es decir:

$$\Delta_1 = |a_{11}|$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$etc.$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

entonces:

1) Si cada $\Delta_k > 0$, para $k = 1,2,\ldots,n$, entonces $sig(A) = (n,0)$
2) Si $(-1)^k \Delta_k > 0$, para $k = 1,2,\ldots,n$, entonces $sig(A) = (0,n)$, (nótese que en este caso los signos de los deltas van alternadamente de menos a mas, empezando con el signo menos).

Ejemplo 159 Nuevamente considere la matriz A del ejemplo 157

$$A = \begin{pmatrix} -8 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & -8 \end{pmatrix}$$

entonces:

$$\Delta_1 = |-8| = -8$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -8 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 20$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -8 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & -8 \end{vmatrix} = -77$$

como los signos de los deltas van intercalados y empezando con signo negativo, $sig(A) = (0,3)$.

Ejercicios propuestos

Ejercicios 2 Determinar la signatura de las siguientes matrices y clasifique las mismas.

1) $A = \begin{pmatrix} 9 & -2 & -3 \\ -2 & 4 & -2 \\ -3 & -2 & 9 \end{pmatrix}$, Sol. $(3,0)$

2) $A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & -3 \\ -1 & -8 & -1 \\ -3 & -1 & -3 \end{pmatrix}$, Sol. $(0,2)$

3) $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 \\ -2 & 4 & 0 \\ -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$, Sol. $(3,0)$

4) $A = \begin{pmatrix} -8 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & -8 \end{pmatrix}$, Sol. $(0,3)$



Edición: Marzo de 2014.
Este texto forma parte de la Iniciativa Latinoamericana de Libros de Texto abiertos (LATIn), proyecto financiado por la Unión Europea en el marco de su Programa ALFA III EuropeAid.

